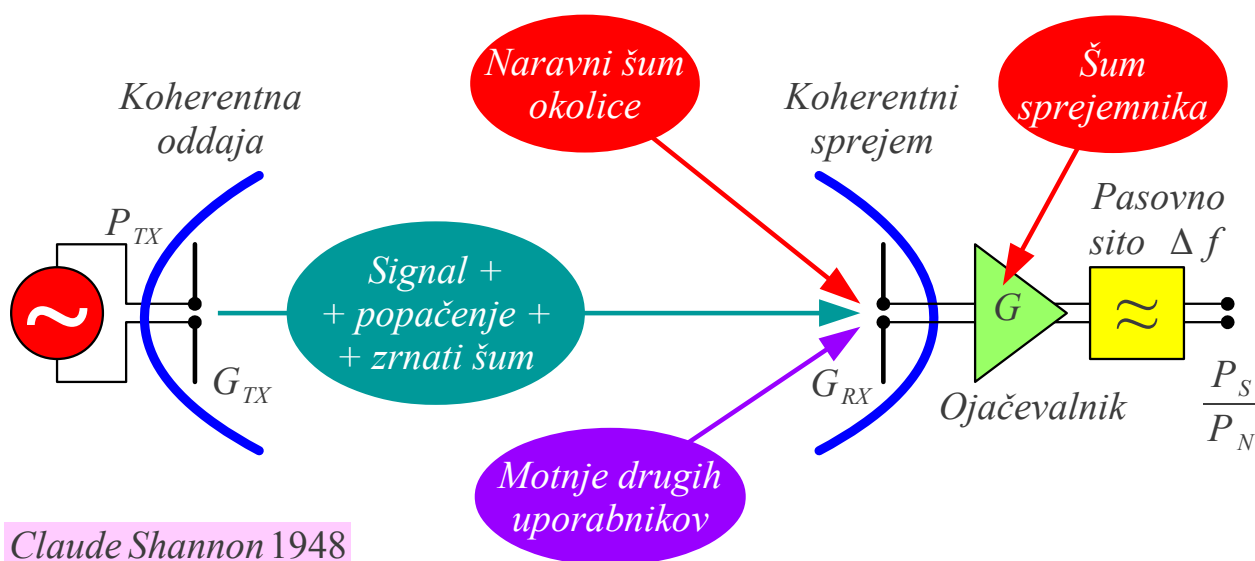


## 13. Toplotni šum

Domet brezvrvične zveze največkrat opišemo kot razmerje  $P_{TX}/P_S$  med močjo oddajnika in močjo signala, ki doseže sprejemnik. Ob upoštevanju dobitkov obeh anten  $G_{TX}$  in  $G_{RX}$  lahko določimo največjo dosegljivo razdaljo  $r$  med oddajnikom in sprejemnikom v praznem prostoru oziroma drugačnih pogojih razširjanja radijskih valov. Iz moči  $P_S$ , ki jo zahteva na svojem vходу sprejemnik, lahko izračunamo potrebno moč oddajnika  $P_{TX}$ .

Moč signala  $P_S$  na vходу sprejemnika določata moč šuma  $P_N$  in zahtevano razmerje signal/šum  $S/N = P_S/P_N$ . Claude Shannon je leta 1948 dokazal, da analogno razmerje signal/šum neposredno določa tudi zmogljivost številske zveze:



Claude Shannon 1948

$$C = \Delta f \log_2 \left( 1 + \frac{P_S}{P_N} \right) = \Delta f \log_2 \left( 1 + \frac{P_S}{P_{\text{popačenja}} + P_{\text{zrnati}} + P_{\text{okolice}} + P_{\text{sprejemnika}} + P_{\text{motenj}}} \right)$$

$\Delta f [\text{Hz}] = B \equiv$  pasovna širina

$P_S [\text{W}] \equiv$  moč signala

$C [\text{bit/s}] \equiv$  zmogljivost radijske zveze

$P_N [\text{W}] = \Delta f \cdot N_0 \equiv$  moč šuma

Zmogljivost radijske zveze

$N_0 [\text{W/Hz} = \text{J}] \equiv$  spektralna gostota šuma

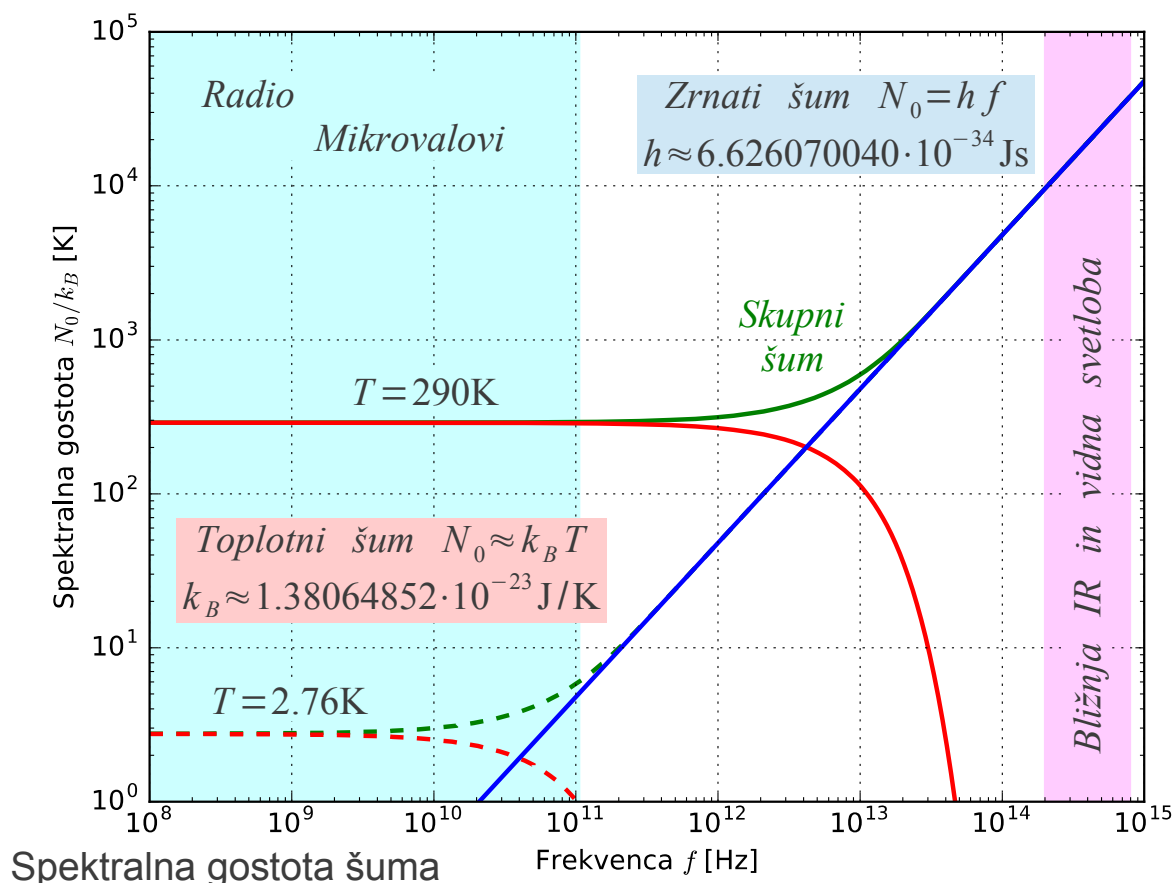
V brezvrvični zvezi z elektromagnetnim valovanjem je skupna moč šuma  $P_N$  vsota moči različnih pojavov: popačenja signala, moč zrnatega (kvantnega) šuma signala, naravni šum okolice sprejemnika, motnje drugih

uporabnikov in šum, ki ga dodaja sam sprejemnik. Popačenje lahko nastane v samem oddajniku oziroma zaradi večpotja pri razširjanju radijskih valov. Elektromagnetno valovanje ni zvezna fizikalna veličina, pač pa je sestavljeno iz določenega števila fotonov, kar povzroča zrnati šum. Energija fotonov in moč zrnatega šuma naraščata premo-sorazmerno s frekvenco.

Učinkovita izraba radio-frekvenčnega prostora zahteva, da se isti radio-frekvenčni kanali na določeni varni oddaljenosti dodeljujejo še dodatnim drugim oddajnikom. Motnje med različnimi uporabniki istih kanalov tedaj niso zanemarljive. Končno omejujeta občutljivost sprejemnika naravni šum okolice in šum samega sprejemnika, ki sta največkrat toplotnega izvora.

Moč šuma in motenj je običajno enakomerno porazdeljena po frekvenčnem spektru. Šum in motnje je zato smiselno opisati s spektralno gostoto moči  $N_0 [\text{W/Hz}]$ . Spektralna gostota moči zrnatega šuma  $N_0 = h f$  je zmnožek Planckove konstante in frekvence, kar je hkrati enako energiji enega fotona. Spektralna gostota moči toplotnega šuma je pri nizkih frekvencah (Rayleigh-Jeansov približek)  $N_0 = k_B T$  zmnožek Boltzmannove konstante in absolutne temperature:

$$P_N = \Delta f N_0 \quad \Delta f \equiv \text{pasovna širina} \quad N_0 \equiv \text{spektralna gostota šuma}$$



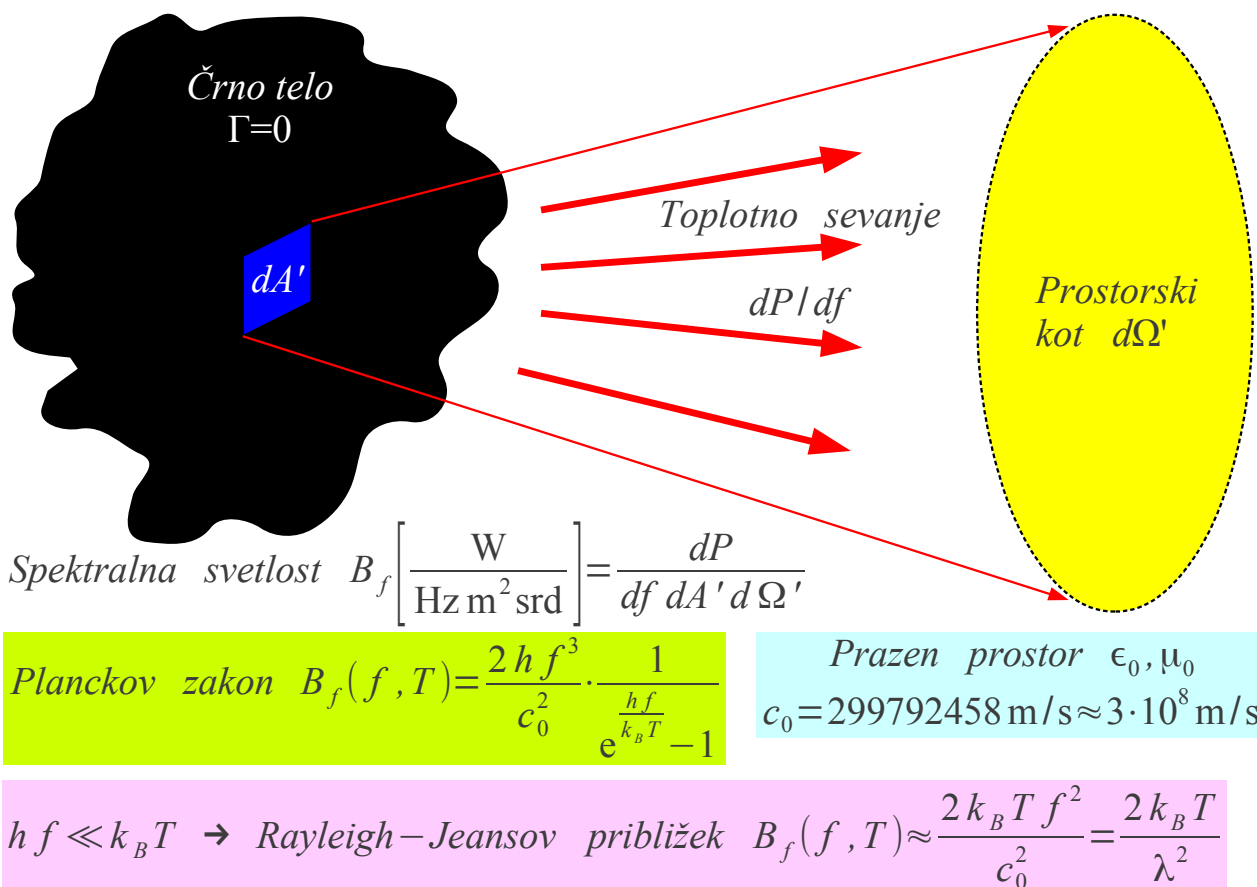
Za lažjo primerjavo sta oba, zrnati in toplotni šum izrisana kot razmerje

$N_0/k_b[\text{K}]$ . V področju radijskih valov  $f \leq 100\text{GHz} = 10^{11}\text{ Hz}$  pri sobni temperaturi  $T \approx 290\text{K} \approx 17^\circ\text{C}$  popolnoma prevladuje toplotni šum nad zrnatim šumom. Celo v najhladnejših delih vesolja s temperaturo  $T \approx 2.76\text{K}$  (ostanek prapoka pred  $\sim 13.8$  milijardami let) je zrnati šum opazen šele nad  $f > 10\text{GHz} = 10^{10}\text{ Hz}$ .

V področju bližnje IR in vidne svetlobe  $f \approx 400\text{THz} = 4 \cdot 10^{14}\text{ Hz}$  toplotni šum popolnoma izgine, spektralna gostota zrnatega šuma pa naraste za dva velikostna razreda nad nizkofrekvenčni toplotni šum pri  $T \approx 290\text{K}$ . Vsota toplotnega šuma brez približkov in zrnatega šuma je zvezna funkcija frekvence, ki začne monotono naraščati v področju med radijskimi valovi in svetlobo, pri sobni temperaturi nad  $f > 1\text{THz} = 10^{12}\text{ Hz}$ .

Toplotno sevanje kot funkcijo frekvence in temperature je natančno opisal Max Planck leta 1900. Toplotno sevanje črnega telesa  $\Gamma=0$  je največje. Telesa drugačnih barv  $|\Gamma|>0$  sevajo manj od črnega telesa, natančneje sorazmerno z  $1-|\Gamma|^2$  glede na črno telo. Hkrati se v telesu, ki ne vpija vsega vpadnega valovanja  $|\Gamma|>0$ , vsaj delno zrcali sevanje drugih virov. Planckov zakon je lahko zapisan v obliki spektralne svetlosti na dva različna načina:  $B_f(f, T)$  v frekvenčnem prostoru oziroma  $B_\lambda(\lambda, T)$  v prostoru valovnih dolžin.

Spektralna svetlost  $B_f(f, T)$  opisuje moč toplotnega sevanja  $dP$  v frekvenčnem pasu širine  $df$ , ki jo seva ploskica črnega telesa  $dA'$  v prostorski kot  $d\Omega'$ . Pri radijskih frekvencah je energija fotona  $hf \ll k_B T$  dosti manjša od toplotne energije. Splošni Planckov zakon je smiselno poenostaviti v Rayleigh-Jeansov približek (1905), kjer Planckova konstanta  $h$  ne nastopa več:

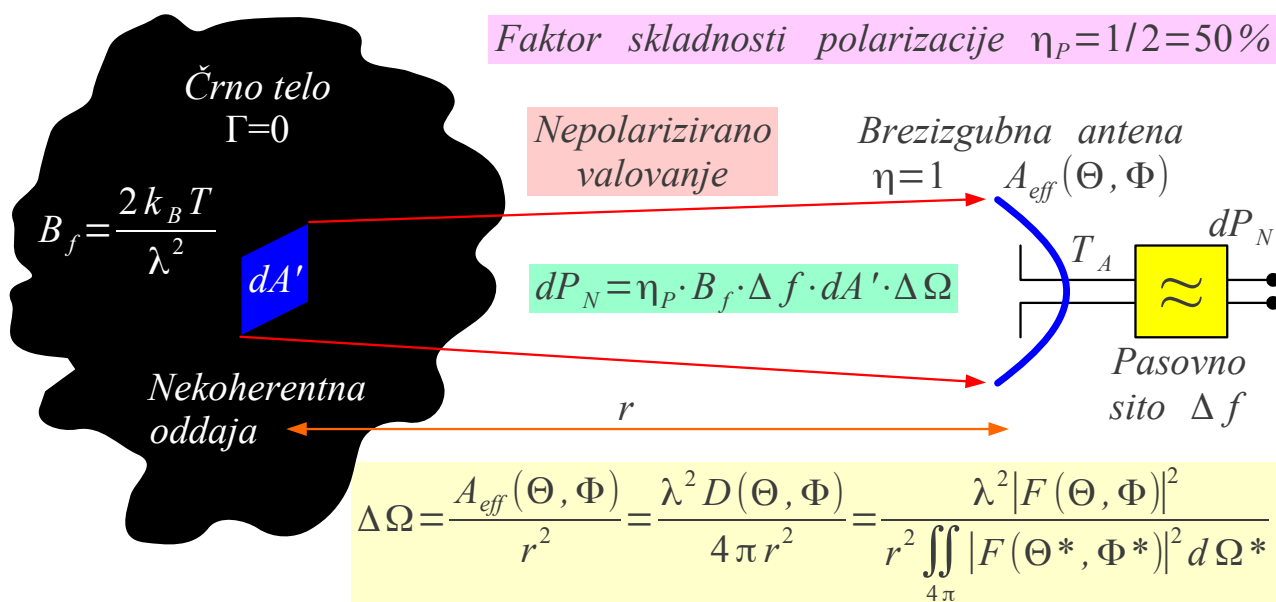


Toplotno sevanje črnega telesa

S pomočjo Rayleigh-Jeansovega približka je smiselno računati delež moči sevanja črnega telesa, ki ga sprejme radijska antena. Pri računanju ne smemo pozabiti, da nismo odkrili nič novega! Fiziki so morali pred mnogimi leti izpeljati isti račun v obratni smeri, da so iz rezultatov številnih različnih meritev najprej prišli do različnih približkov in končno določili vse konstante Planckovega zakona.

Brezizgubna radijska antena  $\eta=1$  sama po sebi nič ne seva, pač pa sevanje drugih virov pretvarja v električni signal na priključku oziroma obratno, električni signal generatorja pretvarja v sevanje v prostoru. Frekvenčna pasovna širina antene je običajno omejena, v radijskem sprejemniku jo še dodatno omejimo z ozkim pasovno-prepustnim sitom širine  $\Delta f \ll f$  glede na osrednjo frekvenco antene oziroma sita.

Toplotno sevanje črnega telesa je nepolarizirano valovanje. Kakršnakoli koherentna sprejemna antena daje faktor skladnosti polarizacije  $\eta_P = 1/2$ . Antena torej sprejme natančno polovico sevanje moči črnega telesa, ki zadene njeno efektivno površino  $A_{\text{eff}}(\Theta, \Phi)$ . Preostala polovica sevanja črnega telesa ima pravokotno polarizacijo glede na sprejemno anteno:



$$P_N = \iint_{A'} \frac{1}{2} \cdot B_f \cdot \Delta f \cdot dA' \cdot \Delta \Omega$$

$$dA' = r^2 d\Omega$$

$$P_N = \Delta f k_B \frac{\iint_{4\pi} T(\Theta, \Phi) |F(\Theta, \Phi)|^2 d\Omega}{\iint_{4\pi} |F(\Theta, \Phi)|^2 d\Omega}$$

Sprejeta moč toplotnega šuma

$$P_N = \Delta f N_0 = \Delta f k_B T_A$$

$$T_A = \frac{\iint_{4\pi} T(\Theta, \Phi) |F(\Theta, \Phi)|^2 d\Omega}{\iint_{4\pi} |F(\Theta, \Phi)|^2 d\Omega}$$

Prostorski kot  $\Delta \Omega = A_{eff}(\Theta, \Phi) / r^2$  določa efektivna površina sprejemne antene.  $A_{eff}(\Theta, \Phi)$  kot funkcijo smeri izračunamo iz močnostnega smernega diagrama antene  $|F(\Theta, \Phi)|^2$ . Integracijo po ploskvi črnega telesa  $dA' = r^2 d\Omega$  prevedemo v integracijo po prostorskem kotu gledano iz sprejemne antene. Končno dopustimo, da je temperatura črnega telesa  $T(\Theta, \Phi)$  funkcija smeri, saj antena vidi v različnih smereh različno tople predmete.

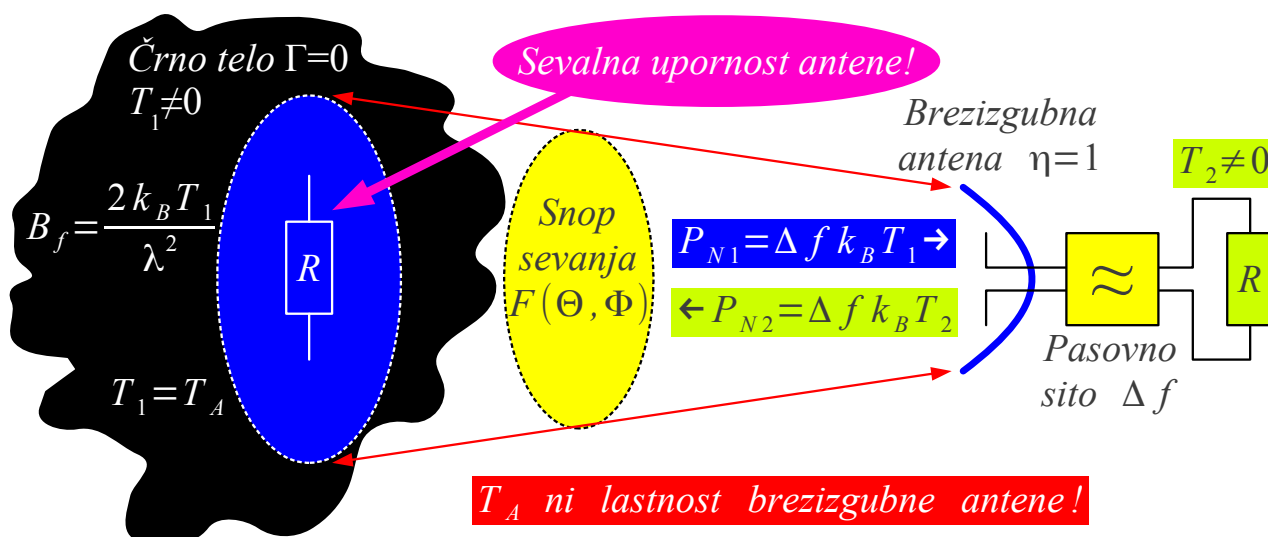
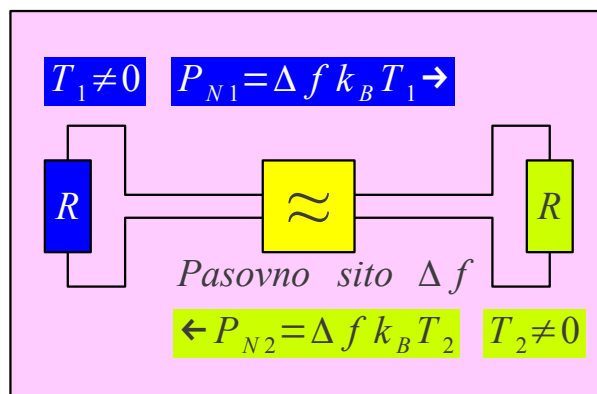
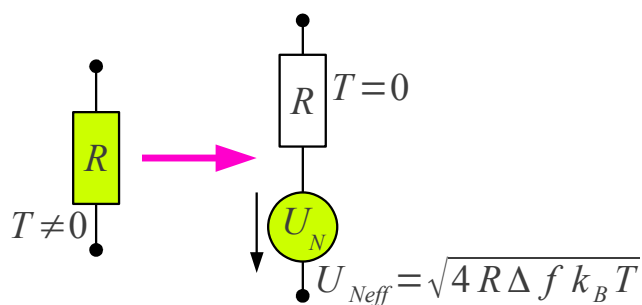
Sprejeta moč šuma  $P_N$  je sorazmerna pasovni širini  $\Delta f$ , Boltzmannovi konstanti  $k_B$  in povprečju temperature črnega telesa  $T(\Theta, \Phi)$ , uteženim z močnostnim smernim diagramom antene  $|F(\Theta, \Phi)|^2$ . Uteženo povprečje temperatur črnega telesa  $T(\Theta, \Phi)$ , ki ga vidi sprejemna antena, imenujemo šuma temperatura antene  $T_A$ .

Enačba  $P_N = \Delta f k_B T$  hkrati pove, kolikšno električno moč proizvaja poljuben upor  $R$  na od nič različni temperaturi  $T \neq 0$  v pasovni širini  $\Delta f$ . Poljuben upor na temperaturi  $T \neq 0$  lahko torej nadomestimo z zaporedno vezavo hladnega upora  $R$  in napetostnega izvora naključnega

signala šuma efektivne vrednosti  $U_{Neff} = \sqrt{4 R \Delta f k_B T}$ . Opisani vir daje največjo moč prilagojenemu bremenu  $\Gamma = 0$ , torej še enemu enakemu upor  $R$ .

Če dva enaka upora  $R$  povežemo preko pasovno-prepustnega sita  $\Delta f$ , pošilja upor na temperaturi  $T_1 \neq 0$  moč  $P_{N1} = \Delta f k_B T_1$  drugemu uporu. Slednji na temperaturi  $T_2 \neq 0$  vrača prvemu moč  $P_{N2} = \Delta f k_B T_2$ . Ker izvora naključnega signala šuma nista sinhronizirana med sabo, je skupni pretok moči skozi pasovno-prepustno sito  $\Delta f$  kar razlika moči  $P_{N1} - P_{N2}$ . Slednja je usmerjena tako, da streži k izenačenju  $T_1 = T_2$  temperatur obeh uporov:

Toplotno ravnovesje

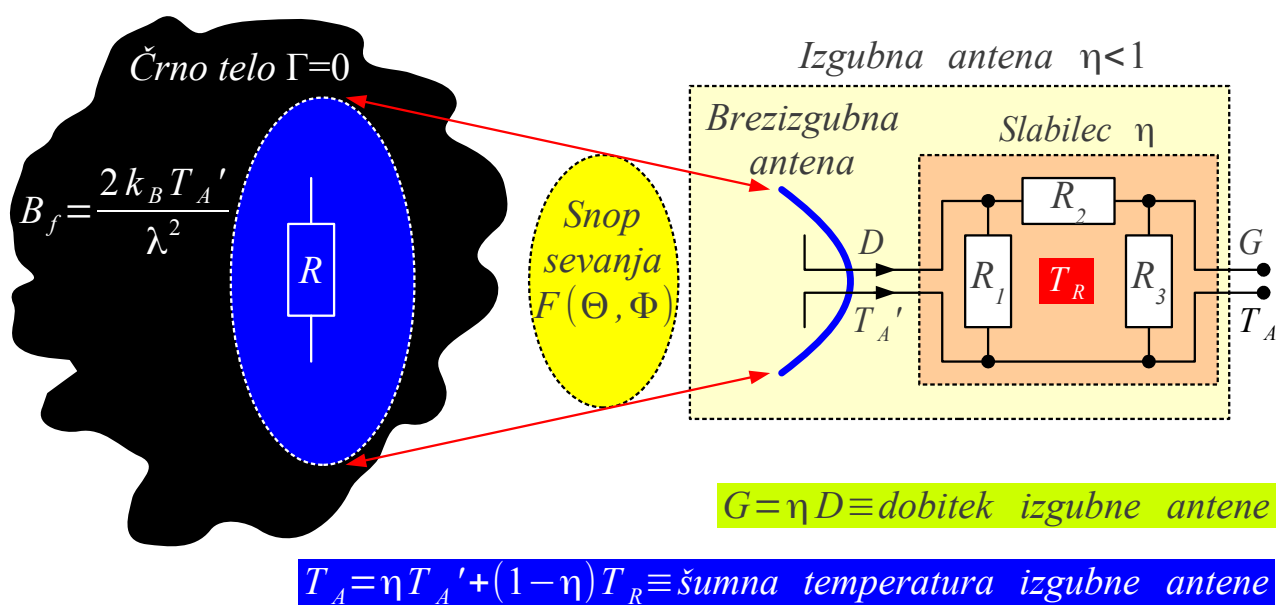


Brezizgubna radijska antena  $\eta = 1$  in pasovno-prepustno sito  $\Delta f$  sta samo posrednika med črnim telesom na temperaturi  $T_1 = T_A \neq 0$  in bremenom  $R$  na temperaturi  $T_2 \neq 0$ , na katerega je priključena antena. Pretok moči je največji, ko antena vidi črno telo ( $\Gamma = 0$  za valovanje v praznem prostoru) in je hkrati breme  $R = R_S$  prilagojeno sevalni upornosti antene ( $\Gamma = 0$  za valovanje na električnem prenosnem vodu). Razlika moči

$P_{N1} - P_{N2}$  med črnim telesom in uporom je usmerjena tako, da streli k izenačenju  $T_1 = T_2$  temperatur črnega telesa in upora.

Opisana razlaga hkrati pojasnjuje fizikalni pomen sevalne upornosti antene  $R_S$ . Upornost  $R_S$  se ne nahaja v sami anteni, pač pa v črnem telesu  $\Gamma = 0$ , ki ga antena vidi v svojem smernem diagramu  $F(\Theta, \Phi)$ . Črno telo je tudi izredno oddaljeno temno nebo, kjer je treba res dolgo čakati več milijard let, da se valovanje kjerkoli odbije in vrne nazaj v anteno. Obratno, če brezizgubno anteno  $\eta = 1$  zapremo v končno veliko kovinsko ohišje z brezhibno zrcalnimi stenami  $|\Gamma| = 1$ , se vsa izsevana moč vrne nazaj v anteno in gre sevalna upornost antene  $R_S \rightarrow 0$  proti nič!

Šuma temperatura antene  $T_A$  torej ni lastnost brezizgubne antene  $\eta = 1$ , pač pa lastnost predmetov v vidnem polju smernega diagrama antene  $F(\Theta, \Phi)$ . Dobro načrtovana antena ima sevalni izkoristek  $\eta \approx 1$  blizu enote. Resnično anteno s sevalnim izkoristkom manjšim od enote  $\eta < 1$  sicer natančno opisuje zaporedna vezava brezizgubne antene in prilagojenega slabilca  $\eta$  iz uporov  $R_1$ ,  $R_2$  in  $R_3$ :



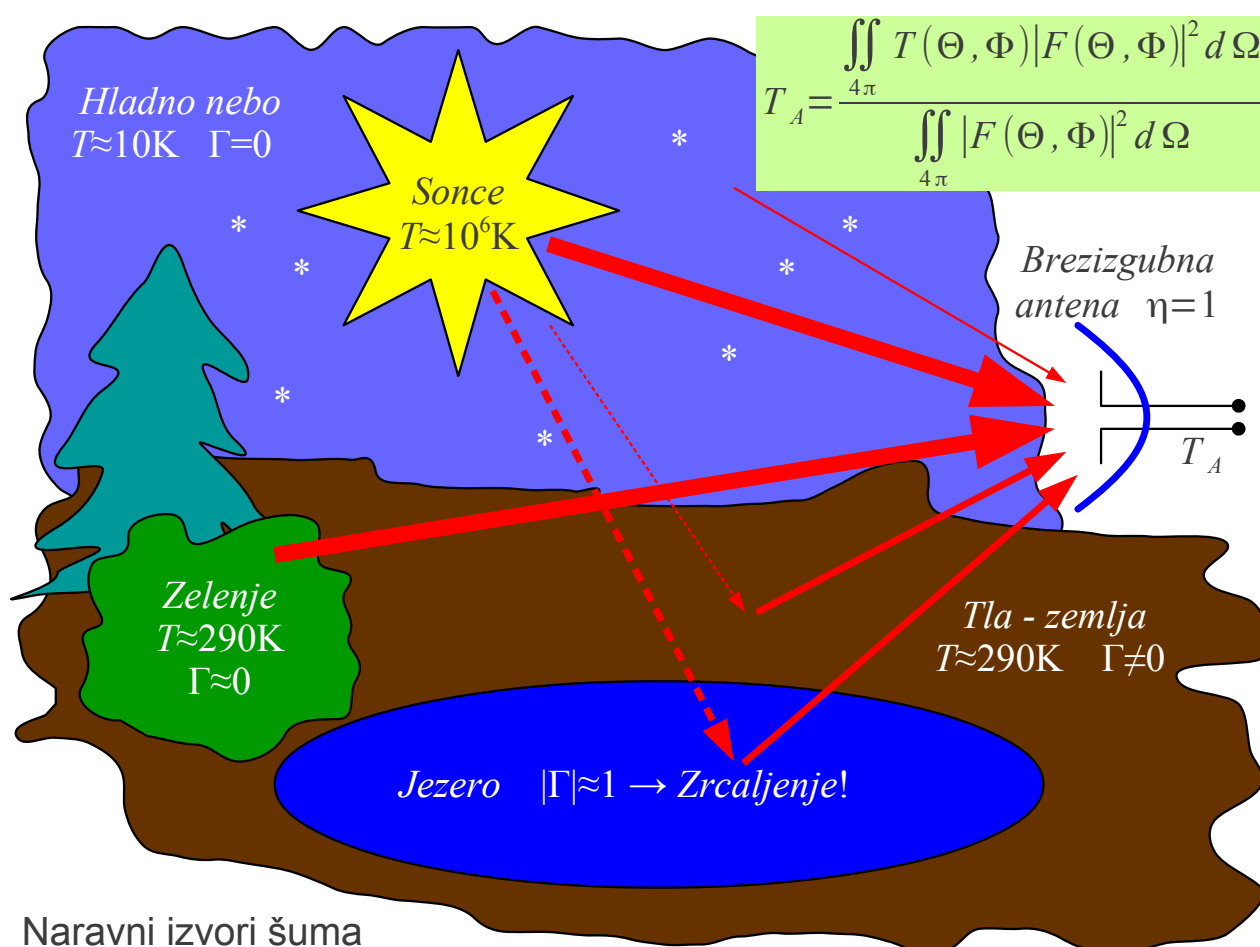
$T_R \approx 290\text{K} \equiv \text{temperatura slabilca}$

$$T_A = \eta \left[ \frac{\iint_{4\pi} T(\Theta, \Phi) |F(\Theta, \Phi)|^2 d\Omega}{\iint_{4\pi} |F(\Theta, \Phi)|^2 d\Omega} \right] + (1 - \eta) T_R$$

Dobitek in šumna temperatura izgubne antene

Sevalni izkoristek  $\eta < 1$  odžira dobiček  $G = \eta D$  izgubne antene in odžira šum, ki ga sevajo predmeti v vidnem polju antene. Izgube v konstrukciji antene, ki jih ponazarjajo upori slabilca  $R_1$ ,  $R_2$  in  $R_3$ , hkrati dodajajo šum lastnega toplotnega sevanja, saj je temperatura konstrukcije antene  $T_R \neq 0$  različna od nič! Temperatura konstrukcije antene  $T_R \approx 290\text{K}$  je običajno blizu temperature predmetov oziroma ozračja v neposredni okolici antene.

Antena v praktični radijski zvezi sprejema šum iz različnih virov:



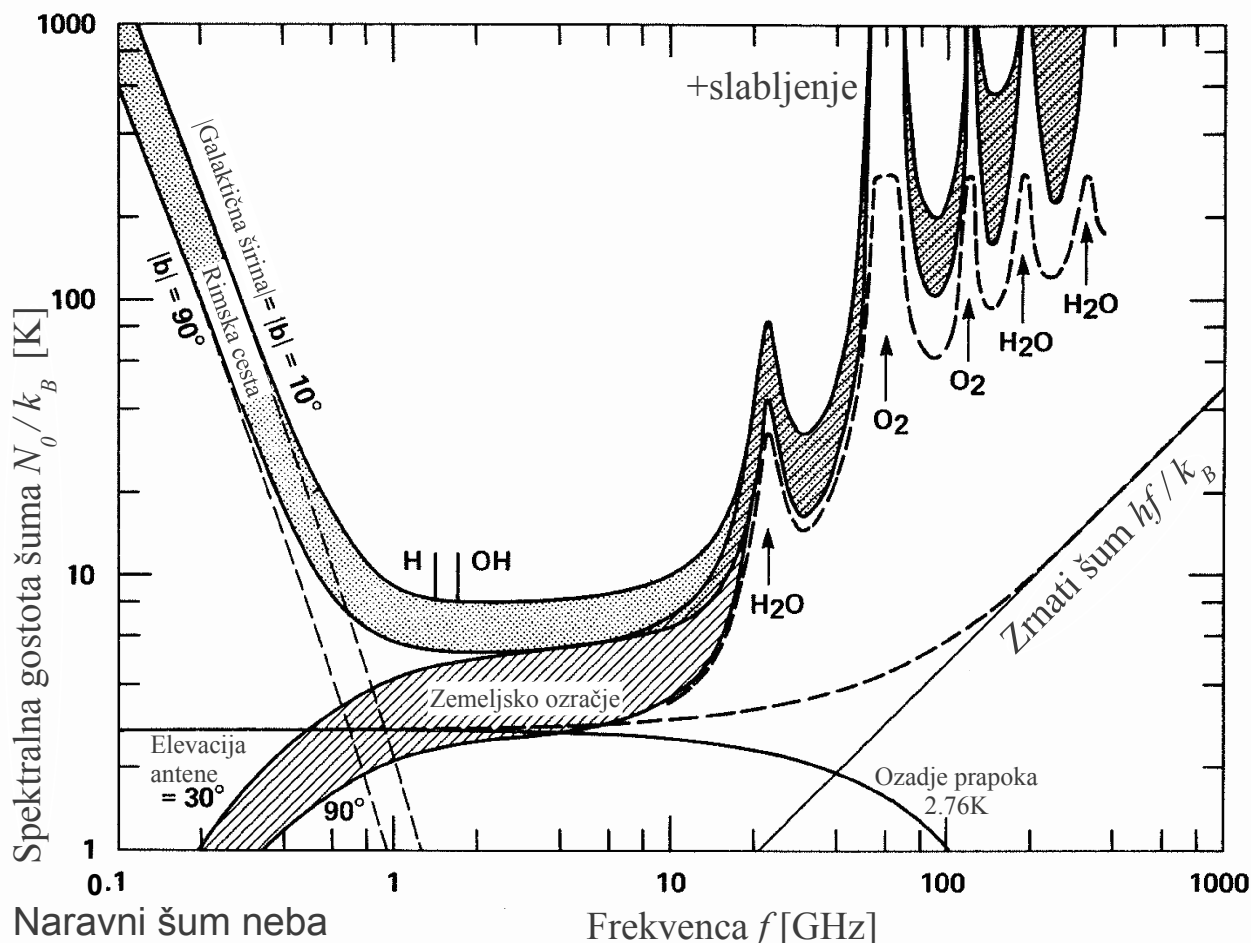
Naravni izvori šuma

V radijskem spektru zelenje običajno seva kot črno telo  $\Gamma = 0$  s temperaturo okoli  $T \approx 290\text{K}$ . Čeprav so tla na podobni temperaturi, tla niso dobro črno telo  $\Gamma \neq 0$ . Vodna gladina je za radijske valove skoraj brezhibno zrcalo  $|\Gamma| = 1$ , zato antena v gladini jezera vidi druge vire sevanja. Mokrota po dežju sicer povečuje odbojnost tal in zelenja.

Šumna temperatura neba se v radijskem spektru zelo spreminja, ker nebesni viri ne sevajo toplotno in zanje Planckov zakon ne velja. V področju mikrovalov  $f \approx 1\text{GHz}..10\text{GHz}$  je nebo zelo hladno okoli  $T \approx 10\text{K}$  z izjemo redkih spektralnih črt nebesnih virov: atomarni vodik pri



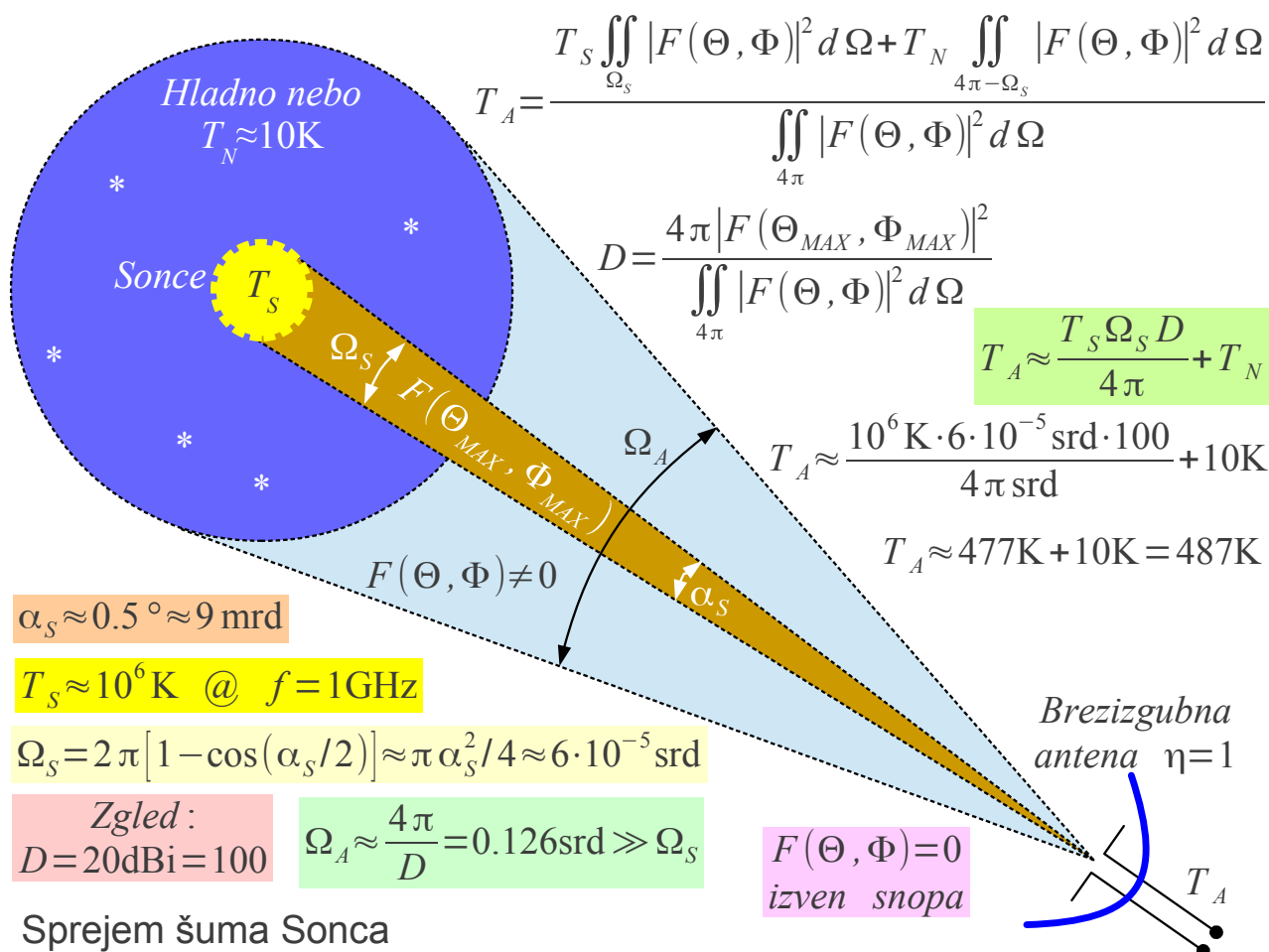
$f \approx 1.42\text{GHz}$  oziroma molekula OH pri  $f \approx 1.67\text{GHz}$ . Sevanje nebesnih virov izredno naraste preko zemeljskega toplotnega šuma na nizkih frekvencah pod  $f \leq 100\text{MHz}$ :



Na frekvencah nad  $f \geq 10\text{GHz}$  opazimo rezonance molekul plinov, ki sestavljajo ozračje: vodna para pri  $f \approx 22\text{GHz}$  in  $f \approx 183\text{GHz}$ , kisik pri  $f \approx 60\text{GHz}$  in  $f \approx 120\text{GHz}$  in tako naprej. Nad  $f \geq 100\text{GHz}$  postane zemeljsko ozračje skoraj popolnoma neprozorno in seva kot črno telo s temperaturo blizu  $T \approx 290\text{K}$ . Če poleg temperature plinov upoštevamo še dodatno slabljenje ozračja, naraste navidezna temperatura šuma tako visoko, da do frekvence nad  $f \geq 100\text{GHz}$  neuporabne za radijske zveze z vesoljskimi plovili.

Najmočnejši nebesni vir sevanja je Sonce. Niti Sonce ne seva kot črno telo. Izraženo s temperaturo sevanja Sonce seva v spektru vidne svetlobe s temperaturo  $T \approx 6000\text{K}$ . V radijskem spektru je temperatura sevanja Sonca dosti višja, je odvisna od frekvence in se spreminja iz dneva v dan z aktivnostjo Sonca v enajst-letnem ciklu sončnih peg. Srednje aktivno Sonce dosega  $T_s \approx 10^6\text{K}$  pri frekvenci  $f = 1\text{GHz}$  oziroma valovni dolžini  $\lambda = 30\text{cm}$ .

Radijsko sevanje Sonca lahko znatno poveča šumno temperaturo antene, ki je obrnjena v nebo. Šum Sonca lahko prekine sprejem telekomunikacijskega satelita, ko je Sonce natančno v ozadju satelita gledano iz zemeljske sprejemne postaje. V primeru manjše antene je zorni kot Sonca znatno manjši od širine snopa radijske sprejemne antene, zato povečanje šumne temperature anten ni tako veliko:



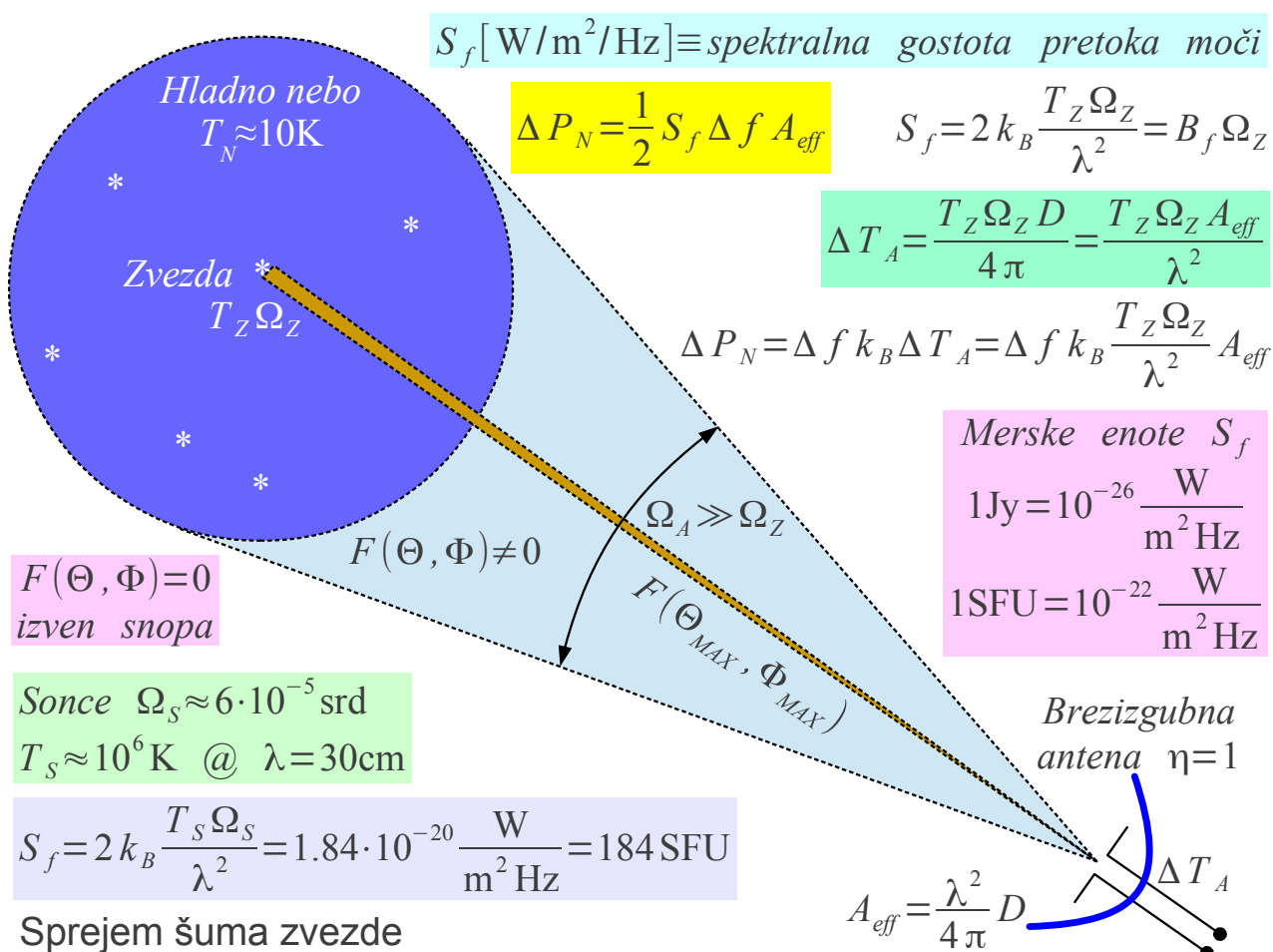
Sonce vidimo iz Zemlje pod zornim kotom približno  $\alpha_S \approx 0.5^\circ$ , kar pretvorimo v prostorski kot  $\Omega_S \approx 6 \cdot 10^{-5} \text{ srd}$ . Slednji je dosti manjši od prostorskega kota  $\Omega_A \approx 0.126 \text{ srd}$  sevanja antene s smernostjo

$D = 20\text{dBi}$ . Za opisano anteno je Sonce točkast vir sevanja s hladnim nebom  $T_N \approx 10\text{K}$  v ozadju, kar poenostavi izračun šumne temperature antene. V opisanem zgledu Sonce doprinese  $\Delta T \approx 477\text{K}$  k šumni temperaturi antene, kar opazi vsak sodoben radijski sprejemnik s polprevodniškimi ojačevalniki.

Sevanje drugih nebesnih teles je prvi opazil Karl Guthe Jansky leta 1933 med določanjem motenj na frekvenci  $f \approx 20.5\text{MHz}$ . Nadomestna temperatura toplotnega sevanja črnega telesa primerno opisuje sevanje vseh

porazdeljenih virov tudi v primeru, ko njihovo sevanje ni toplotnega izvora. Karl Guthe Jansky je opazil sevanje središča naše galaksije Rimske ceste, ki ni toplotnega izvora.

Poleg porazdeljenih virov sevanja so na nebu tudi točkasti viri. Zvezde vidimo pod izredno majhnim prostorskim kotom  $\Omega_Z \rightarrow 0$ , nadomestna temperatura radijskih zvezd pa je izredno visoka  $T_Z \rightarrow \infty$ . Sevanje točkastih virov opisujeta kvečjemu zmnožka  $T_Z \Omega_Z$  oziroma  $B_f \Omega_Z$ :

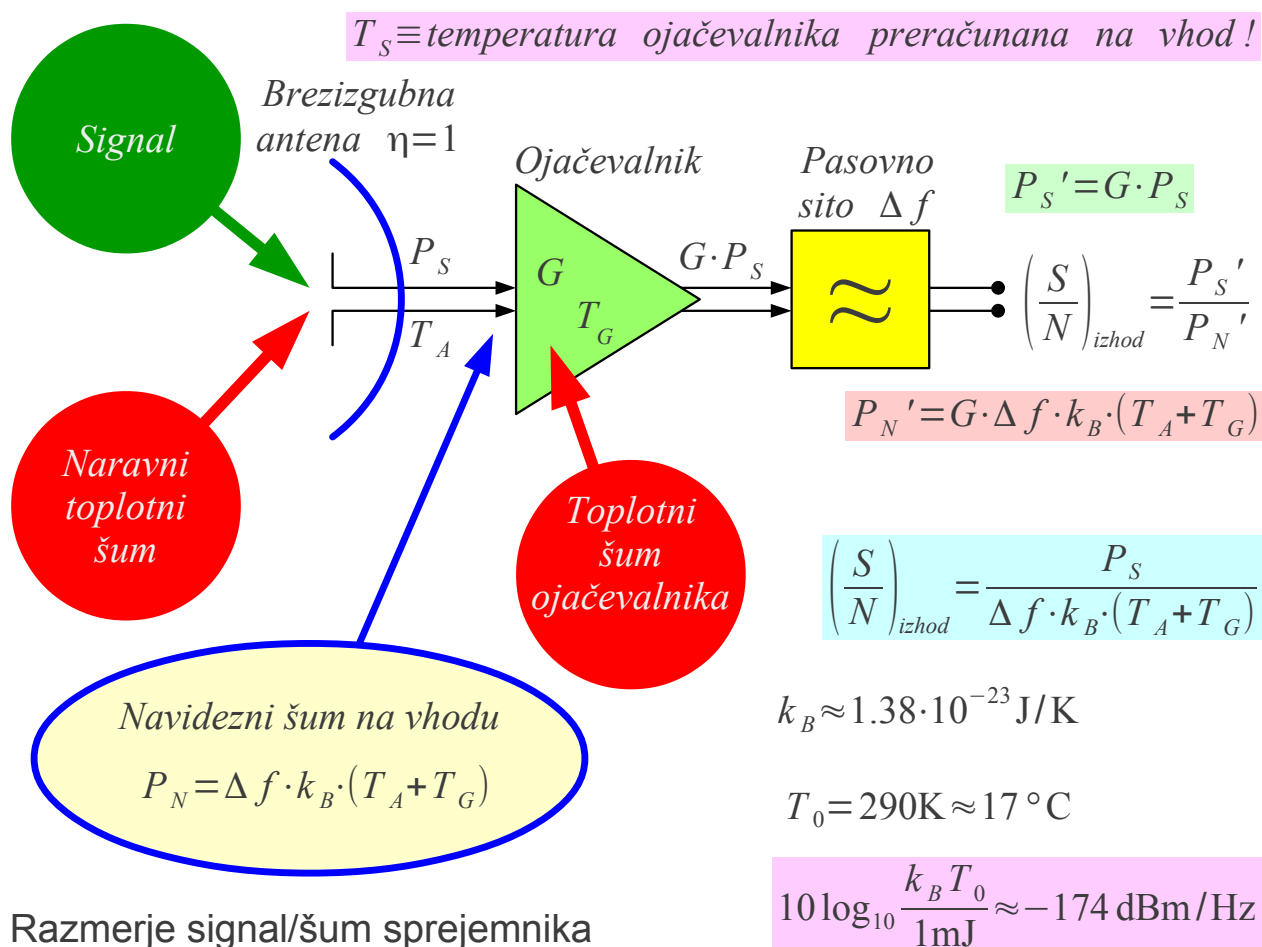


Namesto zmnožkov  $T_Z \Omega_Z$  oziroma  $B_f \Omega_Z$  sevanje točkastih virov pogosto opisujemo s spektralno gostoto pretoka moči  $S_f = 2 k_B T_Z \Omega_Z / \lambda^2$  oziroma  $S_f = B_f \Omega_Z$ . Ker je merska enota sistema MKSA prevelika, v praksi uporabljamo za spektralno gostoto pretoka moči dve manjši merski enoti Jansky [Jy] in Solar Flux Unit [SFU]:

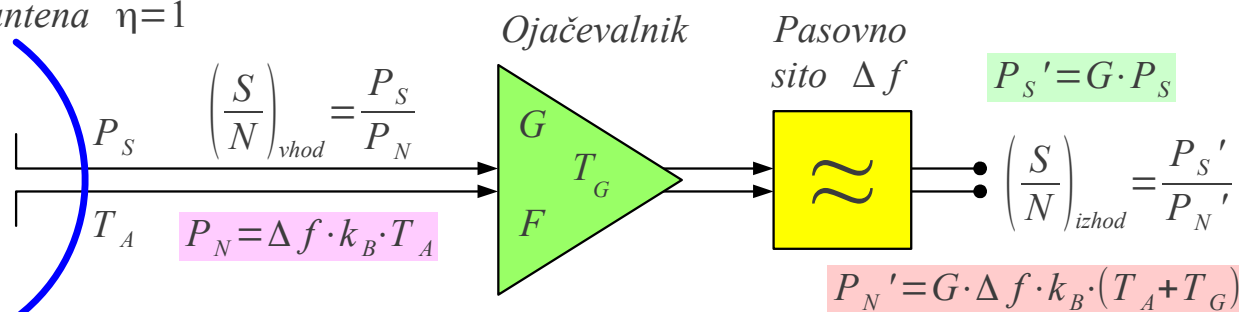
$$1\text{Jy} = 10^{-26} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{Hz}} \quad \text{oziroma} \quad 1\text{SFU} = 10^{-22} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{Hz}}$$

Sevanje srednje aktivnega Sonca s temperaturo  $T_S \approx 10^6 \text{ K}$  ustreza

$S_f \approx 184 \text{ SFU}$  , ko smernost sprejemne antene dopušča obravnavanje Sonca kot točkasti vir. Sevanje radijskih zvezd je za štiri velikostne razrede šibkejše, kar upravičuje manjšo mersko enoto Jansky [Jy] .



Brezizgubna  
antena  $\eta=1$



*Nesmiselna definicija šumnega števila:*

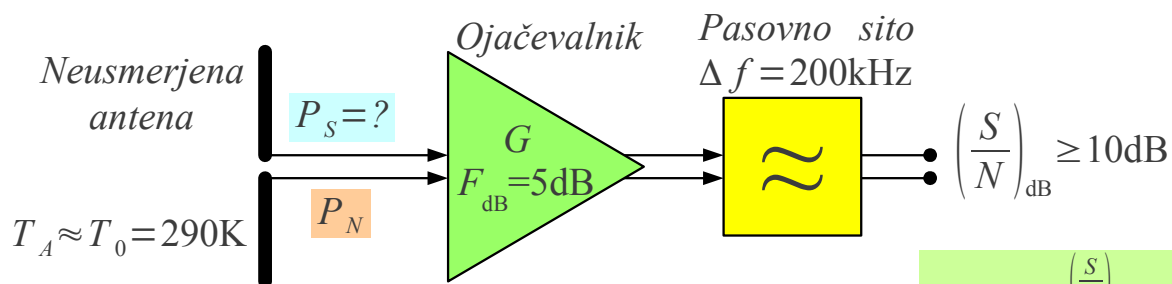
$$F = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{vhod}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{izhod}} = \frac{\frac{P_S}{\Delta f k_B T_A}}{\frac{G P_S}{G \Delta f k_B (T_A + T_G)}} = \frac{T_A + T_G}{T_A} = 1 + \frac{T_G}{T_A}$$

*Lastnost ojačevalnika ne more biti funkcija  $T_A$ !*

*Smiselna definicija*  $F = 1 + \frac{T_G}{T_0}$  @  $T_0 = 290\text{K} \approx 17^\circ\text{C} \leftrightarrow T_G = T_0(F - 1)$

*Logaritemske enote*  $F_{\text{dB}} = 10 \log_{10} F = 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{T_G}{T_0} \right) \leftrightarrow T_G = T_0 \left( 10^{\frac{F_{\text{dB}}}{10}} - 1 \right)$

Šumno število ojačevalnika



$$T_G = T_0 \cdot \left( 10^{\frac{F_{\text{dB}}}{10}} - 1 \right) = 290\text{K} \cdot (3.162 - 1) = 627\text{K}$$

$$\left( \frac{S}{N} \right) = 10^{\frac{\left( \frac{S}{N} \right)_{\text{dB}}}{10}} \geq 10$$

$$P_N = \Delta f \cdot k_B \cdot (T_A + T_G) = 200\text{kHz} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot (290\text{K} + 627\text{K}) = 2.53 \cdot 10^{-15} \text{ W}$$

$$P_S = P_N \cdot \left( \frac{S}{N} \right) = P_N \cdot 10 = 2.53 \cdot 10^{-14} \text{ W}$$

$$P_{S\text{dBm}} = 10 \log_{10} \frac{P_S}{1\text{mW}} = -106\text{dBm}$$

*Poenostavljen izračun izključno v primeru  $T_A \approx T_0 = 290\text{K}$*

$$P_{S\text{dBm}} \approx \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{dB}} + (\Delta f)_{\text{dB} \cdot \text{Hz}} + (k_B T_0)_{\text{dBm/Hz}} + F_{\text{dB}}$$

$$(k_B T_0)_{\text{dBm/Hz}} = -174\text{dBm/Hz} \quad (\Delta f)_{\text{dB} \cdot \text{Hz}} = 10 \log_{10} \left( \frac{\Delta f}{1\text{Hz}} \right) = 53\text{dB} \cdot \text{Hz}$$

$$P_{S\text{dBm}} \approx 10\text{dB} + 53\text{dB} \cdot \text{Hz} - 174\text{dBm/Hz} + 5\text{dB} = -106\text{dBm}$$

Občutljivost GSM telefona

