

3. Osnovni viri sevanja

Pojave mirujočih električnih nabojev opisuje elektrostatika. Relativistika zahteva dodatne pojave enakomerno gibajočih električnih nabojev, kar običajno imenujemo magnetostatika. Relativistika še dodatno zahteva, da pospešeni električni naboji sevajo elektromagnetno valovanje. Pospešeno gibanje vključuje tudi kroženje oziroma nihanje.

Gibanje elektronov predstavlja prevodniški tok oziroma konvektivni tok. Hitrost gibanja mora biti dovolj velika, da magnetne pojave sploh opazimo v ozadju elektrostatike. Preprost primer pospešenega gibanja sta izmenični prevodniški tok oziroma izmenični konvektivni tok. Frekvenca izmeničnega toka $\omega \neq 0$ mora biti dovolj visoka, da elektromagnetno sevanje sploh opazimo v ozadju elektrostatike in magnetostatike.

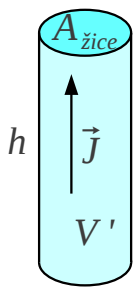
Pojav sevanja elektromagnetnega valovanja razložimo na preprostih osnovnih virih sevanja. Izbrani zgledi so sicer neučinkovite antene, ker so majhni $d \ll \lambda$ v primerjavi z valovno dolžino, na primer Teslov transformator ali feritna antena. Večje ter predvsem bolj učinkovite antene sestavimo iz vsote številnih majhnih oziroma integrala diferencialno majhnih osnovnih virov sevanja.

Preprosti zgledi električno majhnih anten so torej osnovni viri sevanja. Delovanje slednjih moramo natančno preučiti, da lahko razumemo delovanje vseh večjih anten. Osnovni vir sevanja postavimo v izhodišče krogelnega koordinatnega sistema (r, Θ, Φ) in ga zasukamo tako, da je obravnava najenostavnejša. Osnovni viri sevanja običajno omogočajo rotacijsko simetrijo $\partial/\partial\Phi = 0$, da so vse veličine funkcija samo preostalih dveh krogelnih koordinat r in Θ .

Zelo pomemben osnovni vir sevanja je tokovni element, to je kratek košček žice dolžine h s prevodniškim tokom I . Statično magnetno polje tokovnega elementa opisuje Biot-Savartov zakon. V njegovi izvorni obliki Jean-Baptiste Biot in Félix Savart leta 1820 nista upoštevala elektromagnetnega sevanja.

Točno magnetno polje tokovnega elementa izračunamo v elektrodinamiki preko računskega obrazca za zakasneni vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$. Tokovni element postavimo v izhodišče krogelnega koordinatnega sistema (r, Θ, Φ) in žico usmerimo v os z za rotacijsko simetrijo $\partial/\partial\Phi = 0$. Prevodniški tok I ponazorimo z vektorjem gostote toka

$\vec{J}(\vec{r}')$ v prostornini žice V' :



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{1}_z \frac{I}{A_{\text{žice}}}$$

$$dV' = A_{\text{žice}} dz'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \vec{1}_z I \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dz'$$

Poenostavitve:

$$(1) \quad h \ll r \rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

$$(2) \quad h \ll \lambda = \frac{2\pi}{k} \rightarrow e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx e^{-jkr}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{1}_z \frac{\mu I h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} = (\vec{1}_r \cos \Theta - \vec{1}_\Theta \sin \Theta) \frac{\mu I h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\vec{1}_z = \vec{1}_r \cos \Theta - \vec{1}_\Theta \sin \Theta$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{1}_\Phi \frac{I h}{4\pi} e^{-jkr} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta$$

Sevanje

Biot-Savart

Tokovni element

Pri računu upoštevamo poenostavitve, da je žica h kratka in njen presek $A_{\text{žice}}$ še manjši. Tokovni element je kratek $h \ll r$ v primerjavi z oddaljenostjo točke opazovanja in hkrati kratek $h \ll \lambda$ v primerjavi z valovno dolžino. Slednji pogoj omogoča doseganje skoraj konstantne gostote toka $\vec{J}(\vec{r}') = \text{konst.}$ tudi v praktični napravi. Znameniti Teslov transformator popolnoma ustreza vsem omenjenim zahtevam!

Poenostavitev $h \ll r$ dopušča, da pri integraciji zanemarimo spreminjanje amplitude v integralu. Poenostavitev $h \ll \lambda$ dopušča, da pri integraciji zanemarimo spreminjanje faze v integralu. Obe poenostavitvi skupaj dopuščata, da integral po prostornini žice V' zamenjamo s preprostim produktom veličin. V končnem rezultatu za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ moramo samo še zamenjati smernik $\vec{1}_z$ kartezičnega koordinatnega sistema (x, y, z) s smerniki krogelnega koordinatnega sistema (r, Θ, Φ) .

Magnetno poljsko jakost $\vec{H}(\vec{r})$ dobimo po definiciji z izračunom

vrtnčenja vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$. Končni rezultat pogosto imenujemo tudi razširjeni oziroma dopolnjeni Biot-Savartov zakon. Poleg samoumevne zakasnitve e^{-jkr} omejene hitrosti svetlobe v elektrodinamiki vsebuje točen rezultat še sevalni člen jk/r poleg statičnega člena $1/r^2$ izvirnega Biot-Savartovega zakona.

V magnetostatiki $\omega=0$ izgineta oba fazni zasuk zakasnitve in sevalni člen zaradi $k=\omega\sqrt{\mu\epsilon}=0$. Izvorni Biot-Savartov torej natančno velja v magnetostatiki in ostaja uporaben pri nizkih frekvencah na majhnih razdaljah. Pri visokih frekvencah oziroma na velikih razdaljah postane sevalni člen jk/r znatno večji od statičnega člena $1/r^2$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \text{rot } \vec{H} = \frac{Ih}{4\pi j\omega\epsilon} e^{-jkr} \left[\vec{1}_r \left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2\cos\Theta + \vec{1}_\Theta \left(-\frac{k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin\Theta \right]$$

Zveznost
toka/elektrine
 $I = j\omega Q$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Qh}{4\pi} e^{-jkr} \left[\vec{1}_r \left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2\cos\Theta + \vec{1}_\Theta \left(-\frac{k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin\Theta \right]$$

$$\frac{1}{\omega\epsilon} = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{Z}{k}$$

Točkasti statični električni dipol

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^* = \frac{|I|^2 h^2 Z}{32\pi^2 k} \left[\vec{1}_r \left(\frac{k^3}{r^2} - \frac{j}{r^5} \right) \sin^2\Theta + \vec{1}_\Theta \left(\frac{jk^2}{r^3} + \frac{j}{r^5} \right) 2\cos\Theta \sin\Theta \right]$$

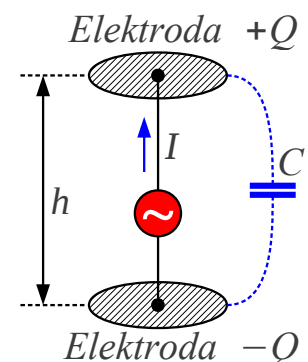
Sevanje

$$P = \oint_{r \rightarrow \infty} \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_r r^2 \sin\Theta d\Theta d\Phi = \frac{|I|^2 h^2 Z k^2}{12\pi}$$

$$R_s = \frac{2P}{|I|^2} = \frac{Zk^2 h^2}{6\pi} = \frac{2\pi Z}{3} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2$$

Dinamični električni dipol

$$h \ll \lambda \rightarrow R_s \ll \frac{1}{\omega C}$$



Tokovna zanka

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$\omega \neq 0$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(r \sin \Theta \cos \Phi - a \cos \Phi')^2 + (r \sin \Theta \sin \Phi - a \sin \Phi')^2 + (r \cos \Theta)^2}$$

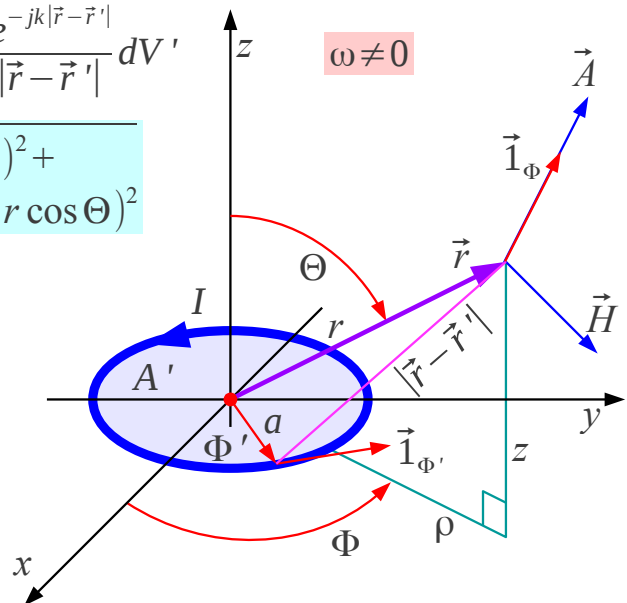
$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{1}_{\Phi'} \frac{I}{A_{\text{žice}}}$$

$$dV' = A_{\text{žice}} a d\Phi'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \vec{1}_{\Phi'} I \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} a d\Phi'$$

$$\vec{1}_{\Phi'} = -\vec{1}_x \sin \Phi' + \vec{1}_y \cos \Phi'$$

$$-\vec{1}_x \sin \Phi + \vec{1}_y \cos \Phi = \vec{1}_{\Phi}$$



Poenostavitve:

$$(1) \quad a \ll r \rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a}{r} \sin \Theta \cos(\Phi - \Phi') \right]$$

$$(2) \quad a \ll \lambda \rightarrow e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx e^{-jkr} \left[1 + jka \sin \Theta \cos(\Phi - \Phi') \right]$$

Površina zanke

$$A' = \pi a^2$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{1}_{\Phi} \frac{\mu}{4\pi} I (\pi a^2) e^{-jkr} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta = \vec{1}_{\Phi} \frac{\mu}{4\pi} I A' e^{-jkr} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{IA'}{4\pi} e^{-jkr} \left[\vec{1}_r \left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2 \cos \Theta + \vec{1}_\Theta \left(-\frac{k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin \Theta \right]$$

Sevanje

Točkasti statični magnetni dipol

$$\rho(\vec{r}') = 0 \rightarrow \text{grad } V(\vec{r}) = 0 \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) \quad \omega\mu = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = kZ$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{1}_\Phi \frac{j\omega\mu IA'}{4\pi} e^{-jkr} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta = \vec{1}_\Phi \frac{ZIA'}{4\pi} e^{-jkr} \left(\frac{k^2}{r} - \frac{jk}{r^2} \right) \sin \Theta$$

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{|I|^2 (A')^2 Z}{32\pi} \left[\vec{1}_r \left(\frac{k^4}{r^2} + \frac{jk}{r^5} \right) \sin^2 \Theta - \vec{1}_\Theta \left(\frac{jk^3}{r^3} + \frac{jk}{r^5} \right) 2 \cos \Theta \sin \Theta \right]$$

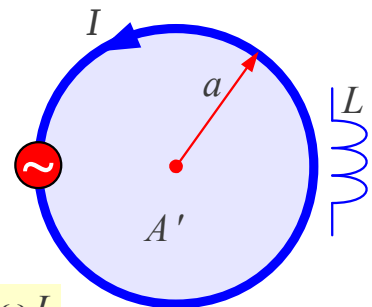
Sevanje

$$P = \oint_{r \rightarrow \infty} \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_r r^2 \sin \Theta d\Theta d\Phi = \frac{|I|^2 (A')^2 Z k^4}{12\pi}$$

$$R_s = \frac{2P}{|I|^2} = \frac{Zk^4 (A')^2}{6\pi} = \frac{8\pi^3 Z}{3} \left(\frac{A'}{\lambda^2} \right)^2$$

Dinamični magnetni dipol

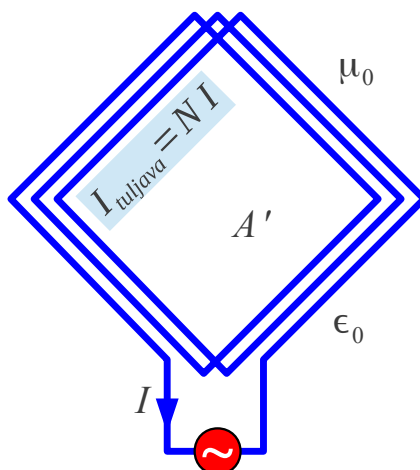
$$\sqrt{A'} \ll \lambda \rightarrow R_s \ll \omega L$$



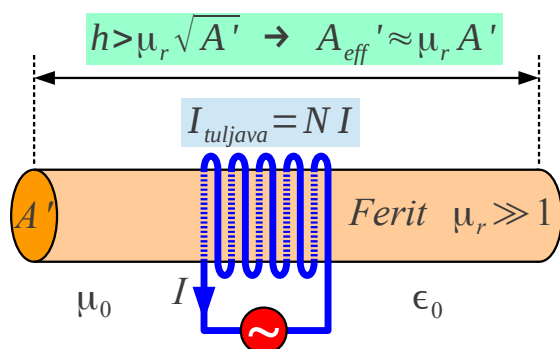
$$R_s = \frac{Z k^4 (N A')^2}{6 \pi} = \frac{8 \pi^3 Z}{3} \left(\frac{N A'}{\lambda^2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} f &\approx 300 \text{ kHz} \\ A' &\approx 1 \text{ m}^2 \\ N &\approx 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zrak} \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega \\ \lambda &= c_0 / f = 1 \text{ km} \\ R_s &\approx 3.1 \mu \Omega \end{aligned}$$



Okvirna antena ~1930



Feritna antena ~1970

$$R_s = \frac{Z k^4 (\mu_r N A')^2}{6 \pi} = \frac{8 \pi^3 Z}{3} \left(\frac{\mu_r N A'}{\lambda^2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} f &\approx 1 \text{ MHz} \\ A' &\approx 1 \text{ cm}^2 \\ h &\approx 20 \text{ cm} \\ \mu_r &\approx 100 \\ N &\approx 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zrak} \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega \\ \lambda &= c_0 / f = 300 \text{ m} \\ R_s &\approx 0.35 \mu \Omega \end{aligned}$$

kartezičnih koordinat (x, y, z) .

Poenostavitve za sevanje

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$r \gg \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \approx -jk \quad \frac{\partial}{\partial \Theta} \approx 0 \quad \frac{\partial}{\partial \Phi} \approx 0 \quad \nabla \approx \vec{1}_r (-jk)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \approx -\frac{jk}{\mu} \vec{1}_r \times \vec{A} = -\frac{j\omega}{Z} \vec{1}_r \times \vec{A} = \vec{1}_\Theta \frac{j\omega}{Z} A_\Phi - \vec{1}_\Phi \frac{j\omega}{Z} A_\Theta$$

$$\text{Lorenz} \quad j\omega\mu \epsilon V + \text{div } \vec{A} = 0 \rightarrow V = \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot \vec{A} \approx \frac{j}{\omega\mu\epsilon} (-jk) A_r = \frac{k A_r}{\omega\mu\epsilon} = \frac{A_r}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \nabla V \approx -j\omega \vec{A} + jk \vec{1}_r \frac{A_r}{\omega\mu\epsilon} = -j\omega \left[\vec{A} - \vec{1}_r (\vec{1}_r \cdot \vec{A}) \right] = -j\omega \left[\vec{1}_\Theta A_\Theta + \vec{1}_\Phi A_\Phi \right]$$

$$\text{Gauss} \quad \frac{\rho}{\epsilon} = 0 = \nabla \cdot \vec{E} \approx -jk \vec{1}_r \cdot \vec{E} = -jk E_r \quad 0 = \nabla \cdot \vec{H} \approx -jk \vec{1}_r \cdot \vec{H} = -jk H_r$$

$$\text{Sevano polje} \quad \vec{1}_r \perp \vec{H} \perp \vec{E} \perp \vec{1}_r \quad E_r = 0 \quad H_r = 0 \quad \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\text{Faraday} \quad \vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \text{rot } \vec{E} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E} \approx \frac{j}{\omega\mu} (-jk) \vec{1}_r \times \vec{E} = \frac{\vec{1}_r \times \vec{E}}{Z} = -\vec{1}_\Theta \frac{E_\Phi}{Z} + \vec{1}_\Phi \frac{E_\Theta}{Z}$$

$$\text{Poynting} \quad \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \approx \frac{\vec{E} \times (\vec{1}_r \times \vec{E})^*}{2Z} = \vec{1}_r \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{2Z} = \vec{1}_r \frac{|\vec{E}|^2}{2Z}$$

* * * * *