

14. Uklon valovanja

Dimni signali Indijancev so vsekakor zvrst brezvrvične zveze, ki uporablja elektromagnetno valovanje. Majhno zmogljivost zveze z dimnimi signali se da izboljšati z uporabo učinkovitejših, brezdimmnih svetlobnih oddajnikov in sprejemnikov. Žal niti slednji ne morejo premagati ovir $h \gg \lambda$, ki so dosti večje od valovne dolžine svetlobe. Omejitev ni v tehnični izvedbi oddajnikov in sprejemnikov, pač pa v izredno majhni valovni dolžini vidne in bližnje infrardeče svetlobe $\lambda \approx 1 \mu\text{m}$.

Rešitev je v uporabi večjih valovnih dolžin. Preprost primer z zvokom kot valovanjem: za oviro (zgradbo) slišimo predvsem nizke tone bučne glasbe. Opisani fizikalni pojav imenujemo uklon valovanja (angleško: wave diffraction). Uklon zvočnega valovanja na oviri manj slabi večje valovne dolžine. Uklonski pojavi za vzdolžna valovanja se kaj dosti ne razlikujejo od uklonskih pojavov za prečna valovanja.

Uklon vidne svetlobe je vsepovsod prisoten pojav, ki ga ne opazimo, ker ga naši možgani namenoma izločijo. Opisano lastnost obdelave slik v naših možganih spretno izkoriščajo algoritmi za izgubno kompresijo slik JPEG in podobni. Slednji količino podatkov v sliki skrčijo na tak način, da so odstopanja od izvornika podobna uklonskim pojavom, torej slabo vidna. JPEG kompresija je silno učinkovita na sliki, ki je že doživela uklonske pojave, na primer pri potovanju skozi objektiv fotoaparata. Obratno JPEG kompresija ustvari celo vrsto "uklonskih" artefaktov na računalniški risbi!

Uklonski pojavi svetlobe žal ne morejo premagati številnih ovir običajnih oblik in izmer v brezvrvični zvezi. Radio uporablja elektromagnetno valovanje, ki ima za približno šest velikostnih razredov večjo valovno dolžino od vidne svetlobe. S pomočjo uklonskih pojavov lahko radio premaga bistveno večje ovire od svetlobe.

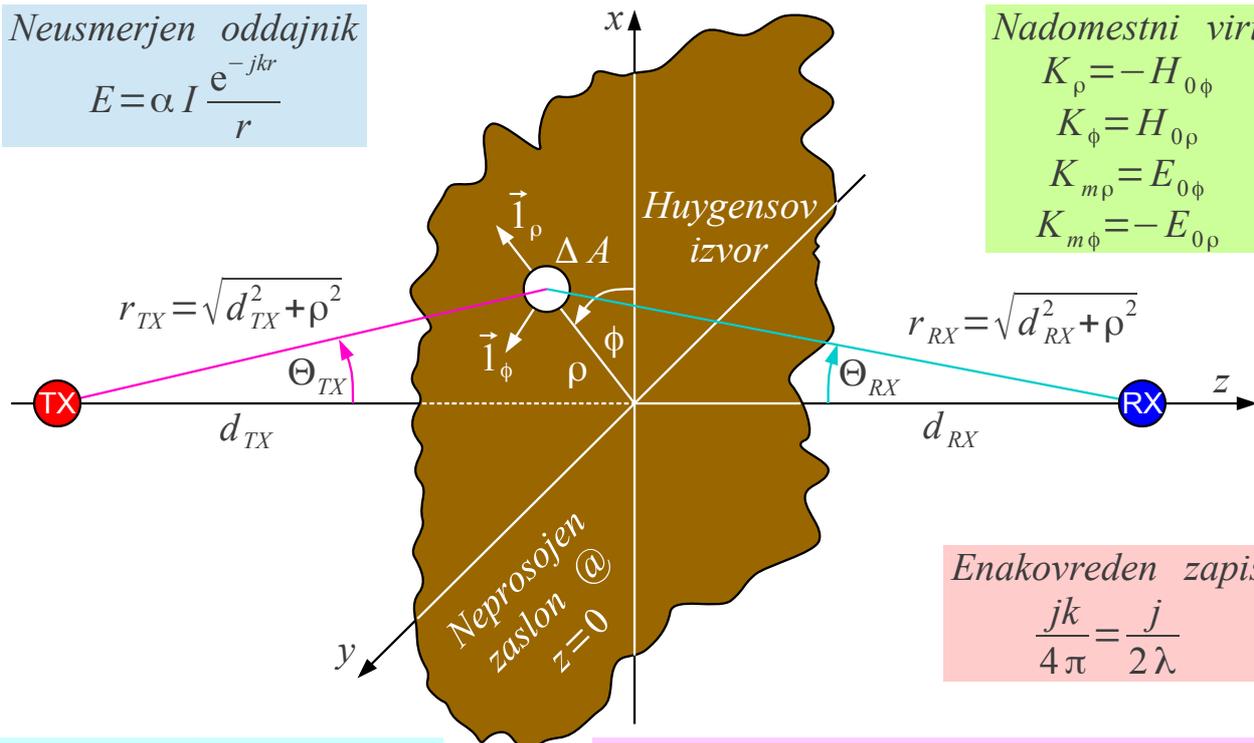
Uklonske pojave lahko obravnavamo tako, da na zveznico v osi z med oddajnikom in sprejemnikom postavimo prečno oviro v ravnini xy . Uklon na oviri skušamo izračunati kot vsoto sevanja Huygensovih izvorov. Huygensov izvor predstavlja majhna odprtina $\Delta A \ll \lambda^2$ v neskončno velikem neprosojnjem zaslonu v ravnini xy :

Neusmerjen oddajnik

$$E = \alpha I \frac{e^{-jkr}}{r}$$

Nadomestni viri

$$\begin{aligned} K_\rho &= -H_{0\phi} \\ K_\phi &= H_{0\rho} \\ K_{m\rho} &= E_{0\phi} \\ K_{m\phi} &= -E_{0\rho} \end{aligned}$$



Enakovreden zapis

$$\frac{jk}{4\pi} = \frac{j}{2\lambda}$$

Odprtina

$$E_{0\rho} = \alpha I_\rho \frac{e^{-jkr_{TX}}}{r_{TX}} \cos \Theta_{TX}$$

$$E_{0\phi} = \alpha I_\phi \frac{e^{-jkr_{TX}}}{r_{TX}}$$

$$H_{0\rho} = -\frac{\alpha}{Z_0} I_\phi \frac{e^{-jkr_{TX}}}{r_{TX}} \cos \Theta_{TX}$$

$$H_{0\phi} = \frac{\alpha}{Z_0} I_\rho \frac{e^{-jkr_{TX}}}{r_{TX}}$$

Neusmerjen sprejemnik

$$E_\rho = \frac{jk}{4\pi} (-K_\rho Z_0 \cos \Theta_{RX} - K_{m\phi}) \Delta A \frac{e^{-jkr_{RX}}}{r_{RX}}$$

$$E_\phi = \frac{jk}{4\pi} (-K_\phi Z_0 + K_{m\rho} \cos \Theta_{RX}) \Delta A \frac{e^{-jkr_{RX}}}{r_{RX}}$$

Rezultat je neodvisen od polarizacije:

$$E = \frac{jk}{4\pi} \alpha I \Delta A \frac{e^{-jkr_{TX}}}{r_{TX}} \frac{e^{-jkr_{RX}}}{r_{RX}} (\cos \Theta_{TX} + \cos \Theta_{RX})$$

Uklon valovanja na Huygensovemu izvoru

Opisanega Huygensovega izvora ne vzbuja ravninski val, pač pa krogelni val neusmerjenega oddajnika na končni razdalji r_{TX} . Valovanje ne vpada na ravnino xy pod pravim kotom, pač pa pod kotom $\Theta_{TX} \neq 0$. Tangencialni komponenti sevanja neusmerjenega vira $E_{0\phi}$ oziroma $H_{0\phi}$ (glede na polarizacijo vira) ležita v ravnini xy .

Nanje pravokotni komponenti sevanja neusmerjenega vira ne ležita v ravnini xy . Prečni radialni komponenti $E_{0\rho}$ oziroma $H_{0\rho}$ (glede na polarizacijo vira) zato vsebujeta faktor projekcije $\cos \Theta_{TX}$. Pripadajoči vzdolžni komponenti E_{0z} oziroma H_{0z} s faktorjem projekcije $\sin \Theta_{TX}$ sta v opisani nalogi nepomembni, saj kot nadomestne vire zahtevata električne σ oziroma magnetne σ_m ploskovne naboje, ki ne sevajo.

Sevanje Huygensovega izvora opisujejo nadomestni tokovi. Tangencialni komponenti vzbujanja $E_{0\phi}$ oziroma $H_{0\phi}$ nadomeščata radialni komponenti magnetnega $K_{m\rho}$ oziroma električnega K_{ρ} ploskovnega toka. Radialni komponenti vzbujanja $E_{0\rho}$ oziroma $H_{0\rho}$ nadomeščata tangencialni komponenti magnetnega $K_{m\phi}$ oziroma električnega K_{ϕ} ploskovnega toka.

Sevanje tangencialnih komponent magnetnega $K_{m\phi}$ oziroma električnega K_{ϕ} ploskovnega toka zadene neusmerjen sprejemnik na osi z z maksimumom smernega diagrama pripadajočih tokovnih elementov. Pri sevanju radialnih komponent magnetnega $K_{m\rho}$ oziroma električnega K_{ρ} ploskovnega toka je treba upoštevati smerni diagram tokovnega elementa v radialni smeri $\sin \Theta_{\rho}$, ki v opisani nalogi ustreza $\cos \Theta_{RX}$.

Sevanje Huygensovega izvora je vsota sevanja nadomestnih električnih \vec{K} in magnetnih \vec{K}_m ploskovnih tokov. Sevanje Huygensovega izvora je v opisani nalogi sorazmerno vsoti obeh projekcij $\cos \Theta_{TX} + \cos \Theta_{RX}$. Huygensov izvor sicer ohranja polarizacijo valovanja, v vseh ostalih pogledih pa je sevanje Huygensovega izvora od polarizacije neodvisno.

Opisani rezultat je povsem skladen s predhodno izpeljavo za vzbujanje z ravninskim valom. Ravninski val proizvaja neusmerjen oddajnik na zelo veliki razdalji $r_{TX} \rightarrow \infty$, kar pomeni $\cos \Theta_{TX} \rightarrow 1$. Zapis $\Theta_{RX} = \Theta$ daje potem znan rezultat $F(\Theta, \Phi) = 1 + \cos \Theta$ za smerni diagram Huygensovega izvora.

Uklon valovanja na poljubni oviri izračunamo tako, da seštejemo sevanje preostalih, nezasenčenih Huygensovih izvorov v ravnini xy . Za vrednotenje uklonskih pojavov je smiselno izraziti končni rezultat kot razmerje E/E_{∞} do neoviranega sevanja enakega neusmerjenega oddajnika v popolnoma praznem prostoru na isti razdalji $r = d_{TX} + d_{RX}$:

$$E_{\infty} = \alpha I \frac{e^{-jkr}}{r} = \alpha I \frac{e^{-jk(d_{TX} + d_{RX})}}{d_{TX} + d_{RX}}$$

Pri izračunu uklona ne smemo privzeti preproste skalarne vsote električnega polja na mestu sprejemnika, saj valovanje prihaja od Huygensovih izvorov v ravnini xy iz zelo različnih smeri. Samo v primeru popolnoma neusmerjene sprejemne antene je vsota kazalcev napetosti na

priključku antene $\Sigma U_i = \alpha' \Sigma E_i$ sorazmerna skalarni vsoti kazalcev električnega polja, ki ga sevajo Huygensovi izvori in pri tem ohranjajo polarizacijo. Skalarni integral $E = \int dE$ je torej nujno vzeti z razumevanjem, saj je smiseln le v primeru seštevanja sevanja Huygensovih izvorov v neusmerjenem sprejemniku!

Prva naloga je ugotoviti, koliko prostora sploh potrebuje radijsko ali drugačno valovanje na poti od oddajnika do sprejemnika. Oddajnik lahko sicer seva v vse smeri, vendar sprejemnik dobi le majhen del oddane moči valovanja. Kolikšen naj bo polmer $a = ?$ krožne odprtine na zveznici oddajnik-sprejemnik (os z) v velikem neprosojnim zaslonu v ravnini xy , da radijska zveza ne bo motena glede na prazen prostor?

Uklon valovanja na krožni odprtini

Neusmerjen oddajnik

$$E = \alpha I \frac{e^{-jkr}}{r}$$

$\rho \rightarrow \infty$

$$E_\infty = \alpha I \frac{e^{-jk(d_{TX} + d_{RX})}}{d_{TX} + d_{RX}}$$

$r_{TX} = \sqrt{d_{TX}^2 + \rho^2}$

$r_{RX} = \sqrt{d_{RX}^2 + \rho^2}$

$\cos \Theta_{TX} = \frac{d_{RX}}{r_{RX}}$

$\cos \Theta_{RX} = \frac{d_{RX}}{r_{RX}}$

$\alpha I = E_\infty \frac{d_{TX} + d_{RX}}{e^{-jk(d_{TX} + d_{RX})}}$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\phi = 2\pi \rho d\rho$$

$$E = E_\infty \frac{jk}{4\pi} \frac{d_{TX} + d_{RX}}{e^{-jk(d_{TX} + d_{RX})}} \iint \frac{e^{-jkr_{TX}}}{r_{TX}} \frac{e^{-jkr_{RX}}}{r_{RX}} (\cos \Theta_{TX} + \cos \Theta_{RX}) dA$$

$$E = E_\infty jk \frac{d_{TX} + d_{RX}}{e^{-jk(d_{TX} + d_{RX})}} \int_0^a \frac{e^{-jk(r_{TX} + r_{RX})}}{r_{TX} r_{RX}} \frac{\cos \Theta_{TX} + \cos \Theta_{RX}}{2} \rho d\rho$$

Pri krožni odprtini je Huygensove izvore najlažje integrirati v polarnih koordinatah (ρ, ϕ) v ravnini xy . Integracija po kotu ϕ je preprosta, saj je naloga rotacijsko simetrična okoli osi z . Amplituda in faza prispevkov posameznih Huygensovih izvorov sta oba odvisna od oddaljenosti ρ od koordinatnega izhodišča.

Pri majhnih krožnih odprtinah $a \ll d_{TX}, d_{RX}$ so relativne spremembe

amplitude posameznih prispevkov Huygensovih izvorov $1/r_{TX}$, $1/r_{RX}$, $\cos \Theta_{TX}$ in $\cos \Theta_{RX}$ zelo majhne. Spremembe faze $e^{-jk(r_{TX}+r_{RX})}$ sicer niso zanemarljive. Pri majhnih odprtinah lahko uporabimo približek prvega reda za fazo:

Približek uklona krožni odprtini

$$a \ll d_{TX}, d_{RX} \rightarrow E \approx E_{\infty} jk \frac{d_{TX} + d_{RX}}{2 d_{TX} d_{RX}} \int_0^a e^{-jk \frac{d_{TX} + d_{RX}}{2 d_{TX} d_{RX}} \rho^2} d\rho^2$$

$$\begin{aligned} \cos \Theta_{TX} &\approx 1 \approx \cos \Theta_{RX} \\ \frac{1}{r_{TX} r_{RX}} &\approx \frac{1}{d_{RX} d_{TX}} \\ e^{-jkr_{TX}} &\approx e^{-jkd_{TX}} e^{-\frac{jk\rho^2}{2d_{TX}}} \\ e^{-jkr_{RX}} &\approx e^{-jkd_{RX}} e^{-\frac{jk\rho^2}{2d_{RX}}} \end{aligned}$$

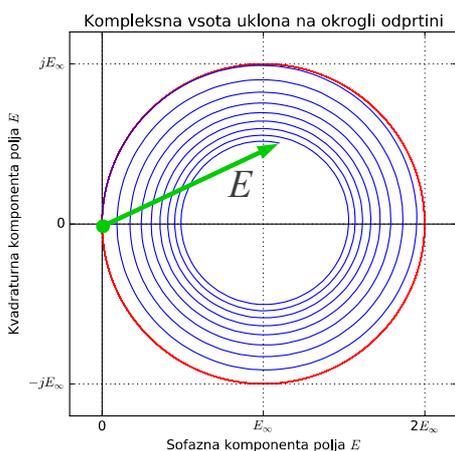
Neposredni žarek

Uklon na robu odprtine

$$E \approx E_{\infty} \left[1 - e^{-jk \frac{d_{TX} + d_{RX}}{2 d_{TX} d_{RX}} a^2} \right]$$

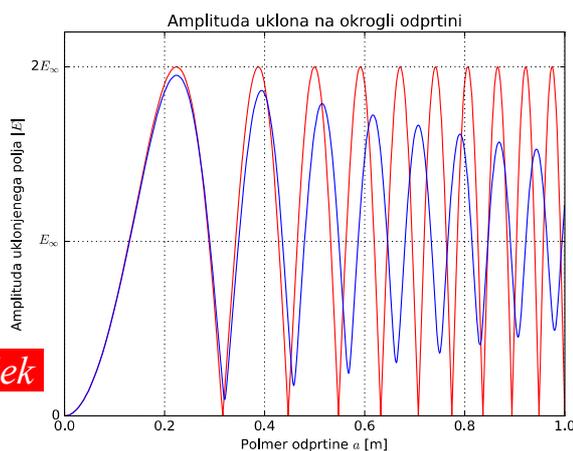
Zgled $\lambda = 10\text{cm}$
 $d_{TX} = 1\text{m}$ $d_{RX} = 1\text{m}$

$$|E| \approx 2 \left| E_{\infty} \sin \left(k \frac{d_{TX} + d_{RX}}{4 d_{TX} d_{RX}} a^2 \right) \right|$$



Točno

Približek



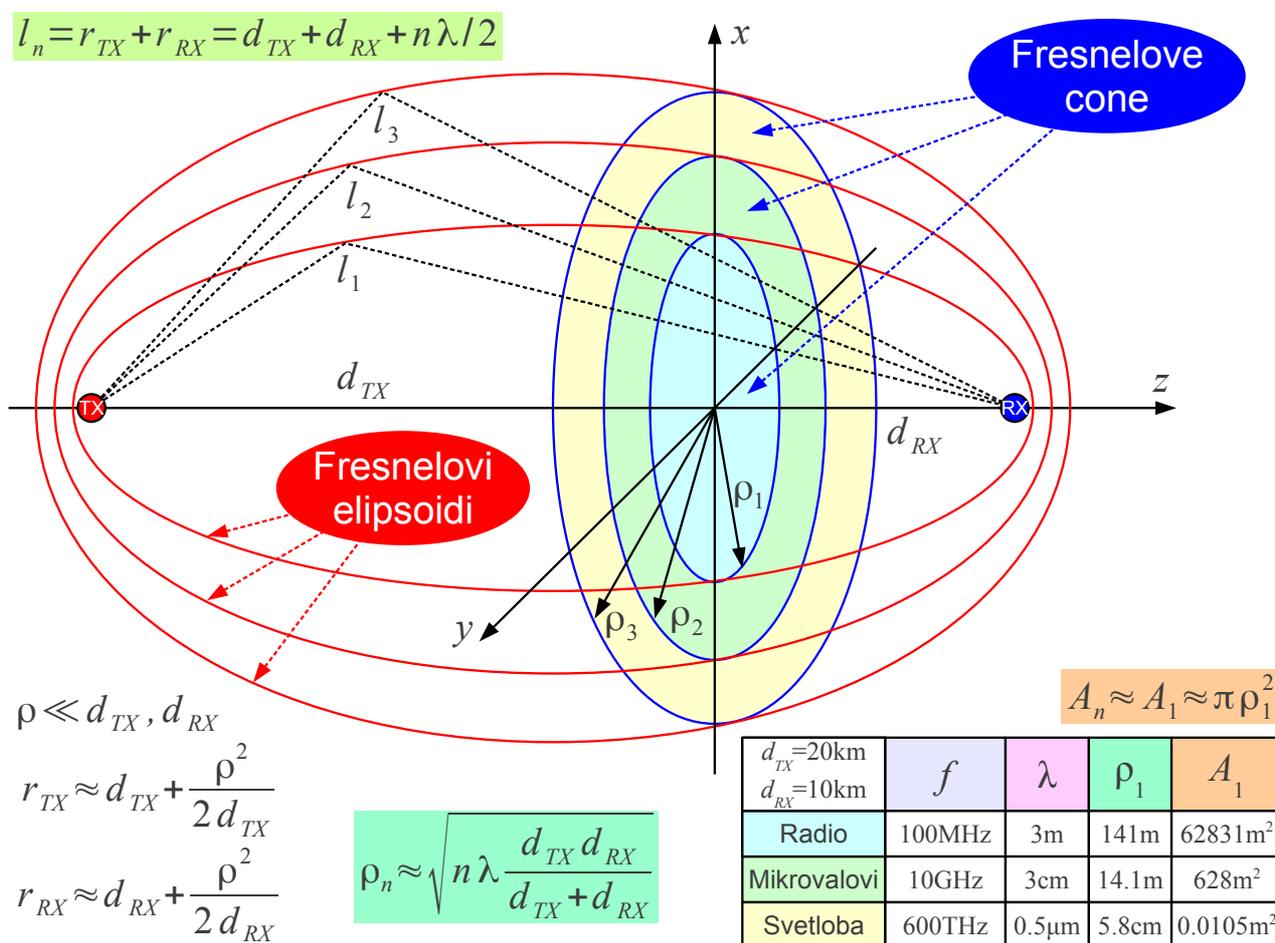
Rezultat integracije je na prvi pogled presenetljiv. Učinek sprememb faze je zelo velik, ampak pri večanju polmera odprtine a se amplituda približka $|E|$ ne približuje $|E_{\infty}|$, pač pa niha med nič in dvakratno amplitudo $2|E_{\infty}|$! Konica približka kazalca E sicer večno kroži okoli E_{∞} po krožnici.

Točna integracija brez približkov nima analitske rešitve, njen številski izračun pa pokaže, da kazalec polja E kroži po spirali in se prav počasi približuje končni vrednosti E_{∞} . Številski zgled na sliki $d_{TX} = d_{RX} = 1\text{m}$ in $\lambda = 10\text{cm}$ je izbran tako, da je spirala dobro vidna. V resničnem praktičnem primeru $\lambda \ll d_{TX}, d_{RX}$ se polmer spirale manjša zelo počasi, da je razlika med točno integracijo in približkom težko opazna!

Oba približek in točna integracija dajeta podobno fizikalno razlago. Skupno polje E na mestu sprejema je kazalčna vsota (interferenca) dveh

žarkov. Neposredni žarek gre po najkrajši poti po zveznici $d_{TX} + d_{RX}$ od oddajnika do sprejemnika. Uklon prepotuje razdaljo $r_{TX} + r_{RX}$ od oddajnika do roba odprtine in od tam do sprejemnika. Točna številka integracija dodatno upošteva zniževanje amplitude uklona s podaljševanjem poti ter potek faze brez približkov.

Poskusi v laboratoriju potrjujejo opisano matematično izpeljavo uklona na krožni odprtini tako za radijske valove kot za svetlobo. Poskusi v laboratoriju pokažejo, da večinoma povsem zadošča približek brez sprememb amplitude in s poenostavljeno fazo. Fazo določa dolžina poti žarka valovanja od oddajnika do sprejemnika. Točke v prostoru, ki imajo enako vsoto poti od oddajnika do sprejemnika $l = r_{TX} + r_{RX} = konst.$, sestavljajo ploskev rotacijski elipsoid z gorišči v oddajniku in v sprejemniku:



Maksimumi uklona na krožni odprtini ustrezajo lihim mnogokratnikom, minimumi uklona pa sodim mnogokratnikom polovice valovne dolžine podaljšanja poti $\Delta l = (r_{TX} + r_{RX}) - (d_{TX} + d_{RX}) = n\lambda/2$ do roba odprtine. Pripadajoče ploskve imenujemo Fresnelovi elipsoidi reda n . Preseke Fresnelovih elipsoidov s poljubno ravnino imenujemo Fresnelove cone reda n .

Pri preseku elipsoidov s pravokotno ravnino xy ima prva Fresnelova cona obliko kroga. Vse ostale Fresnelove cone reda n so kolobarji med elipsoidoma reda $n-1$ in n . Vse Fresnelove cone imajo enako površino $A_N = A_1 = \pi \rho_1^2$.

Najuporabnejša veličina za opis uklonskih pojavov je polmer prve krožne Fresnelove cone $\rho_1 = \sqrt{\lambda d_{TX} d_{RX} / (d_{TX} + d_{RX})}$. Slednji ustreza najmanjšemu polmeru odprtine v neprosojnjem zaslonu, ki daje dvakratno polje $E \approx 2 E_\infty$. S polmerom prve Fresnelove cone se približek uklona na krožni odprtini poenostavi v:

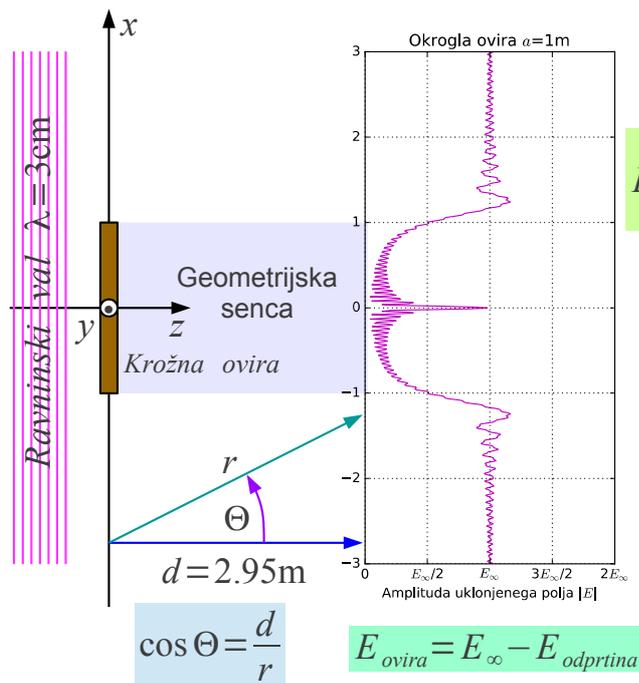
$$E \approx E_\infty \left[1 - e^{-j\pi \left(\frac{a}{\rho_1} \right)^2} \right] \quad \text{ozioroma} \quad |E| \approx 2 \left| E_\infty \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{\rho_1} \right)^2 \right] \right|$$

Polmer prve Fresnelove cone ρ_1 je za metrske valove $\lambda \approx 3\text{m}$ (UKV FM radio) istega velikostnega razreda kot manjši hrib. Za centimetrške valove $\lambda \approx 3\text{cm}$ (mikrovalovna usmerjena zveza) je polmer prve Fresnelove cone v velikostnem razredu stanovanjske zgradbe. Celotna vidna svetloba z valovno dolžino $\lambda \approx 0.5\ \mu\text{m}$ zahteva odprtino premera v velikostnem razredu decimetra na enaki oddaljenosti oddajnika in sprejemnika od neprosojnega zaslona.

Leta 1818 je gradbeni inženir Augustin-Jean Fresnel predstavil svojo teorijo svetlobe na razpis francoske akademije znanosti. Slavni matematik Poisson je skušal Fresnelovo teorijo ovreči. Če Fresnelovi integrali držijo, bi morali sredi sence krožne ovire opaziti svetlo piko, kar je Poisson smatral za nesmisel.

Predsednik komisije Dominique-François-Jean Arago je predlagal in izvedel poskus. Sredi sence kovinskega diska premera $2a = 2\text{mm}$ je Arago opazil svetlo piko! Arago je celo uspel najti stare zapise J. N. Delisle in G. F. Maraldi, ki sta opazila uklonske kolobarje in svetlo piko sredi krožne sence že stoletje prej.

Krožna neprosojna ovira je komplementarni zgled krožne odprtine v neprosojnjem zaslonu. Aragovo piko lahko opazimo v obeh primerih. Za krožno neprozorno oviro vedno opazimo Aragovo piko, ki je enako svetla kot nezasenčen del sprejemnika. Za krožno odprtino se v Aragovi točki polje lahko podvoji $E = 2 E_\infty$ ali pa povsem izgine $E = 0$ glede na medsebojno fazo prispevkov, torej oddaljenostjo ravnine sprejemnika od odprtine:



$$r = \sqrt{(\rho \cos \phi - x)^2 + (\rho \sin \phi)^2 + d^2}$$

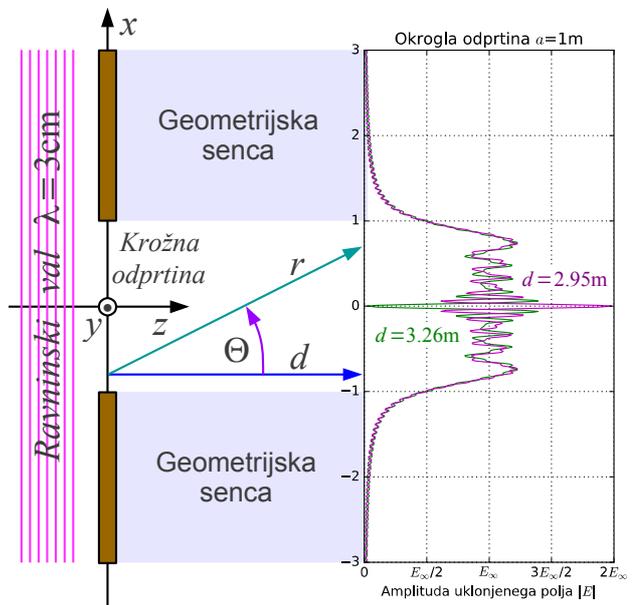
$$E_{odprtina} = E_{\infty} \frac{jk e^{jkd}}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left(1 + \frac{d}{r}\right) \rho d\rho d\phi$$

$$\cos \Theta = \frac{d}{r}$$

$$E_{ovira} = E_{\infty} - E_{odprtina}$$

$$E_{ovira} = E_{\infty} \frac{jk e^{jkd}}{4\pi} \int_a^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left(1 + \frac{d}{r}\right) \rho d\rho d\phi$$

Aragova pika



Številsko računanje integralov oziroma laboratorijski poskus poenostavimo tako, da oviro osvetlamo z ravninskim valom, ki ga daje oddajnik na zelo veliki razdalji $d_{TX} \rightarrow \infty$. Ravnino sprejemnika postavimo na razdalji $d = d_{RX}$ za oviro. Izračun polmerov Fresnelovih con se v tem primeru poenostavi v $\rho_n \approx \sqrt{n\lambda d}$.

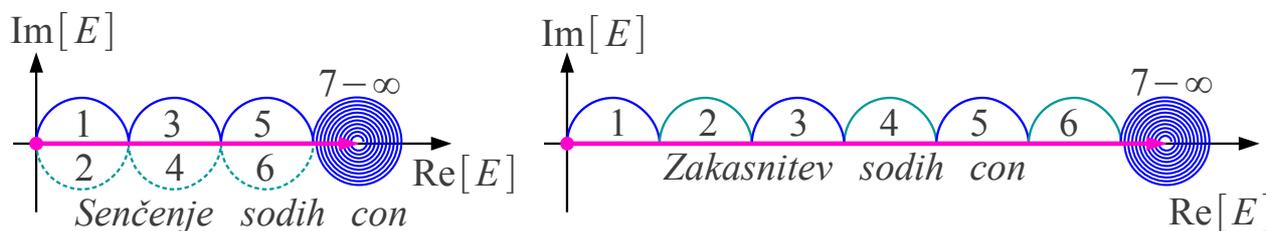
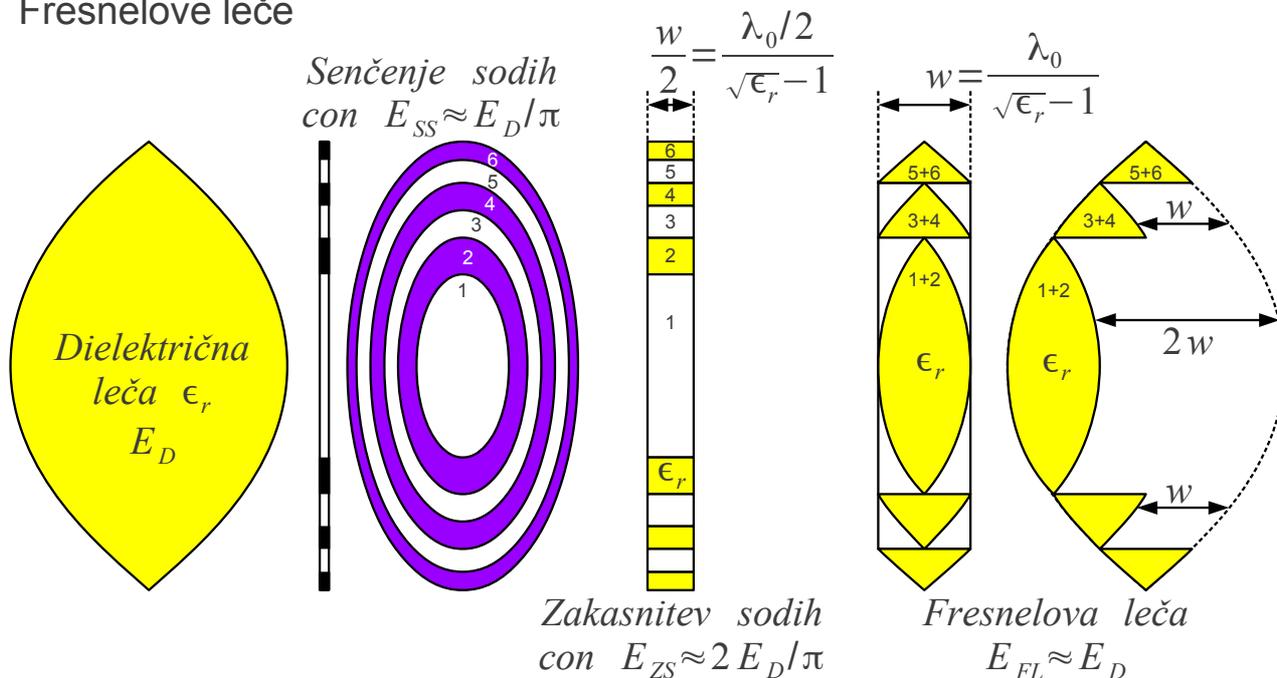
Aragova pika je najmočnejši uklonski pojav, ki ga opazimo samo na osi krožne ovire oziroma krožne odprtine. Povsod drugod so uklonski pojavi najmanj za velikostni razred manjši. Povsod drugod pojave v grobem opisuje geometrijska optika z nekaj malega uklonskega kravžljanja, kot bi neumni heker pretvoril lepo vektorsko računalniško risbo v JPEG.

Pojav Aragove pike v praksi ni nepomemben. Aktivni NdYAG kristali za močnostne laserje se brusijo v obliko valja. Laserska zrcala se zato zažgejo natančno na sredini, kjer v osi krožne odprtine Aragova pika podvoji polje $E \approx 2E_0$, torej je tam gostota moči štirikratna $S \approx 4S_0$! Rotacijsko-simetrično parabolčno zrcalo se obnaša kot krožna ovira za žarilec, če zrcalno anteno gledamo od zadaj. Aragova pika povzroči močen vzratni snop sevanja takšne antene.

Pojav Aragove pike hitro slabi, če oblika ovire oziroma odprtine odstopa od točnega kroga. Vzratni snop antene z rotacijsko-simetričnim parabolčnim

zrcalom zadušimo tako, da rob zrcala nazobčamo. Obratno se da pojav Aragove pike dodatno ojačati z dodatnimi kolobarjastimi ovirami. Na primer, zbiralno lečo lahko izdelamo s senčenem sodih Fresnelovih con:

Fresnelove leče



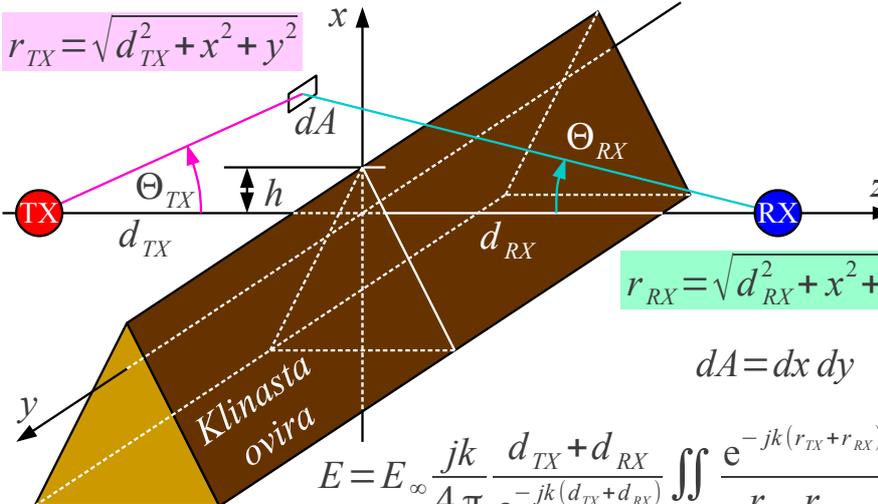
Leča s senčenjem prvih treh sodih con 2, 4 in 6 daje sedemkratno polje $E = 7 E_\infty$ glede na neoviran prostor. Žal leča s senčenjem sodih con ni učinkovita v primerjavi s pravo dielektrično lečo. Leča s senčenjem izgubi polovico polja. Seštevanje kazalcev preostalih prispevkov gre po polkrožnih lokih namesto sofazno, kar pomeni dodatno izgubo polja za faktor $2/\pi$. Skupno daje leča s senčenjem sodih con $E_{SS} = E_D/\pi$ za faktor $a = 20 \log_{10}(1/\pi) = -9.94 \text{ dB} \approx -10 \text{ dB}$ šibkejše polje od dielektrične leče.

Bolj učinkovita je leča z zakasnitvijo sodih con, kjer se nič polja ne zavrže. Zakasnitev prvih treh sodih con 2, 4 in 6 daje trinajstkratno polje $E = 13 E_\infty$ glede na neoviran prostor. Pač pa gre seštevanje kazalcev po polkrožnem loku namesto sofazno. Skupno daje leča z zakasnitvijo sodih con $E_{ZS} = 2 E_D/\pi$ za faktor $a = 20 \log_{10}(2/\pi) = -3.92 \text{ dB} \approx -4 \text{ dB}$ šibkejše polje od dielektrične leče.

Končno lahko pravo Fresnelovo lečo izdelamo tako, da odstranimo

dielektrik, ki vnaša fazni zasuk celoštevilskega mnogokratnika period signala. Prava Fresnelova leča daje enako polje $E_{FL} = E_D$ kot dielektrična leča ob znatnem prihranku materiala.

Naravne ovire običajno niso krožne oblike. Najpogostejša ovira v radijski zvezi je prečni gorski greben, ki sega za višino h nad zveznico oddajnik-sprejemnik. Uklonjeno polje izračunamo tako, da seštejemo sevanje Huygensovih izvorov na nezasenčenem delu ravnine xy . V primeru prečne klinaste ovire je smiselno integrirati v kartezičnih koordinatah (x, y) :



Prečna klinasta ovira

$$r_{TX} = \sqrt{d_{TX}^2 + x^2 + y^2}$$

$$r_{RX} = \sqrt{d_{RX}^2 + x^2 + y^2}$$

$$dA = dx dy$$

$$E = E_\infty \frac{jk}{4\pi} \frac{d_{TX} + d_{RX}}{e^{-jk(d_{TX} + d_{RX})}} \iint \frac{e^{-jk(r_{TX} + r_{RX})}}{r_{TX} r_{RX}} (\cos \Theta_{TX} + \cos \Theta_{RX}) dx dy$$

$x, y \ll d_{TX}, d_{RX}$
 $\cos \Theta_{TX} \approx 1 \approx \cos \Theta_{RX}$
 $\frac{1}{r_{TX} r_{RX}} \approx \frac{1}{d_{RX} d_{TX}}$
 $r_i \approx d_i + \frac{x^2 + y^2}{2d_i}$

$$e^{-jk(r_{TX} + r_{RX})} \approx e^{-jk(d_{TX} + d_{RX})} e^{-jk \frac{d_{TX} + d_{RX}}{2d_{TX} d_{RX}} (x^2 + y^2)} \approx e^{-jk(d_{TX} + d_{RX})} e^{-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\rho_1^2}}$$

$$\frac{2\pi}{k} \frac{d_{TX} d_{RX}}{d_{TX} + d_{RX}} \approx \rho_1^2$$

$$E = E_\infty \frac{j}{\rho_1} \int_0^h e^{-j\pi \frac{x^2}{\rho_1^2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\pi \frac{y^2}{\rho_1^2}} dy$$

$$u = \frac{\sqrt{\pi}}{\rho_1} x$$

$$v = \frac{\sqrt{\pi}}{\rho_1} y$$

$$E = E_\infty \frac{j}{\pi} \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{\rho_1} h}^{\infty} e^{-ju^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jv^2} dv$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jv^2} dv \right]^2 = -j\pi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jv^2} dv = (1-j) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$E = E_\infty \frac{1+j}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{\rho_1} h}^{\infty} e^{-ju^2} du$$

Ko ovira ni rotacijsko simetrična okoli zveznice oddajnik-sprejemnik, ne pride do fokusiranja valovanja v Aragovo točko. Seštevanje prispevkov Huygensovih izvorov zelo hitro konvergira proti končnemu rezultatu.

Relative spremembe amplitude posameznih prispevkov Huygensovih izvorov $1/r_{TX}$, $1/r_{RX}$, $\cos \Theta_{TX}$ in $\cos \Theta_{RX}$ smemo v vseh praktičnih primerih zanemariti. Spremembe faze $e^{-jk(r_{TX} + r_{RX})}$ sicer niso zanemarljive, a hitro približevanje končnemu rezultatu dopušča uporabo približka prvega reda za fazo. Zapis enačb s polmerom prve Fresnelove cone ρ_1 silno poenostavi končni rezultat.

Končni rezultat vsebuje dva podobna integrala oblike $\int e^{-ju^2} du$, ki se razlikujeta edino v mejah integracije. Opisani integral nima analitske rešitve za poljubno spodnjo oziroma gornjo mejo. Številski rešitev integrala je kazalčna vsota v obliki krivulje klotoide, imenovane tudi Eulerjeva ali Cornujeva spirala:

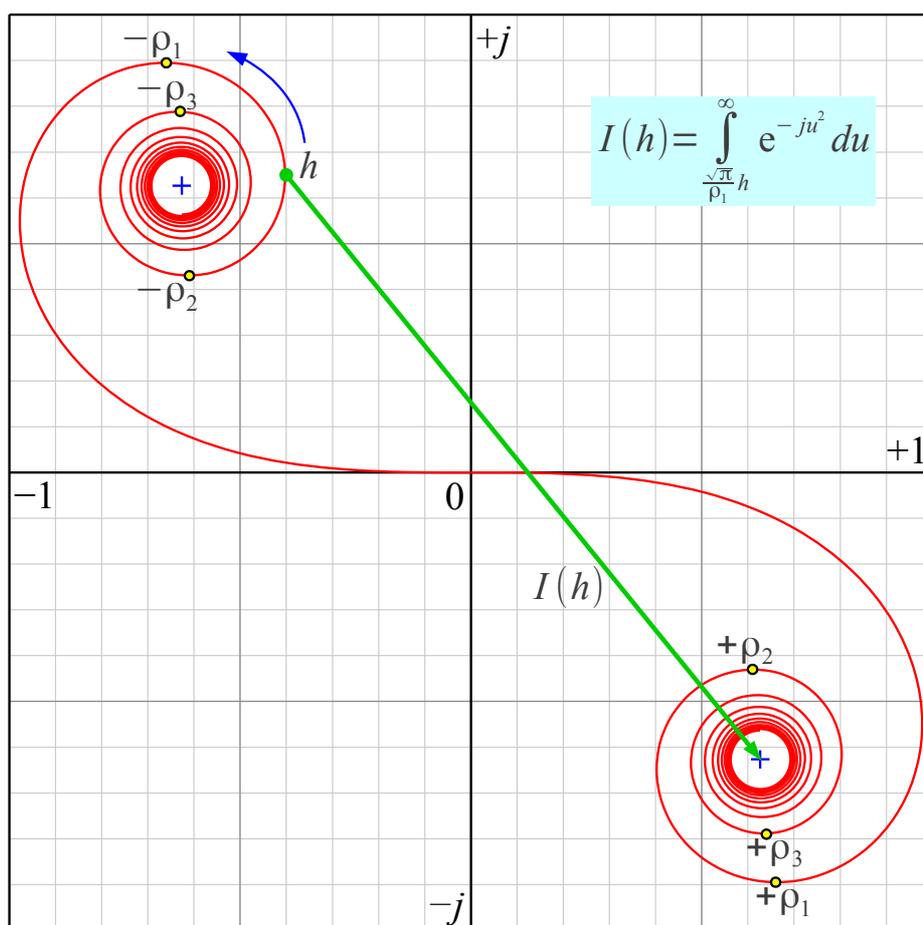
Eulerjeva ali Cornujeva spirala

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ju^2} du = (1-j)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Fresnelova integrala

$$\int_0^x e^{-jt^2} dt = \int_0^x \cos(t^2) dt - j \int_0^x \sin(t^2) dt$$

Klotoida



Integral $\int e^{-ju^2} du$ je analitsko rešljiv pri neskončnih mejah od $-\infty$ do ∞ , kjer njegov kvadrat daje neovirano polje E_{∞} . Pri eni ali obeh končnih mejah je vrednost integrala kazalec med pripadajočima točkama na klotoidi. Na klotoidi se orientiramo s pomočjo polmerov Fresnelovih con. Pri $h = \pm \rho_n$ so prispevki realni, torej je tam smer klotoide vodoravna.

Neskončno široka klinasta ovira v smeri osi y daje integracijo v neskončnih mejah od $-\infty$ do ∞ . V smeri osi x gre integracija v mejah od vrha ovire h navzgor do ∞ .

Ko je vrh ovire globoko pod zveznico oddajnik-sprejemnik $h < -\rho_1$, gre kazalec rezultata iz gornjega polža klotoide v središče spodnjega polža.

Vrednost integrala je tedaj velika in le malo niha okoli osrednje vrednosti. Uklonjeno polje $E \approx E_\infty$ se kaj dosti ne razlikuje od neoviranega polja.

Največja sprememba rezultata se zgodi v območju višine ovire $-\rho_1 < h < \rho_1$. Tu začetek kazalca rezultata preide iz gornjega polža v spodnji polž klotoide. Pri visoki oviri nad $h > \rho_1$ sta začetek in konec kazalca v spodnjem polžu, kar daje majhen rezultat integracije in majhno uklonjeno polje $|E| \ll |E_\infty|$.

V radijski zvezi nas večinoma zanima amplituda uklona $|E|$, ki jo izrišemo v linearnem in v logaritemskem merilu. Klotoida kot tudi potek amplitude uklona $|E|$ dajeta jasen odgovor: valovanje potrebuje prosto prvo Fresnelovo cono $-\rho_1 < x < \rho_1$ oziroma $-\rho_1 < y < \rho_1$ v pripadajočih kartezičnih koordinatnih oseh:

$$E = E_\infty \frac{1+j}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{\rho_1} h}^{\infty} e^{-ju^2} du$$

$$\left| \frac{E}{E_\infty} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{\rho_1} h}^{\infty} e^{-ju^2} du \right|$$

$$\left| \frac{E}{E_\infty} \right|_{MAX} = 1.17 \text{ @ } h = -0.866\rho_1$$

$$a_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{\rho_1} h}^{\infty} e^{-ju^2} du \right| \right)$$

$$h \leq -\rho_1 \rightarrow a_{dB} \approx 0 \text{ dB}$$

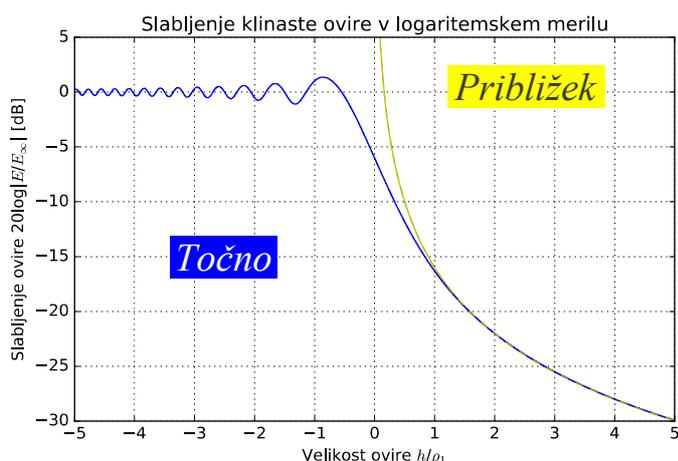
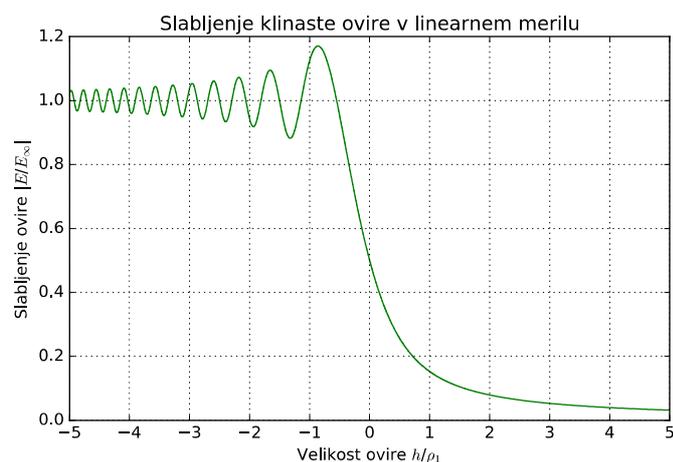
$$a_{MAX} = 1.37 \text{ dB @ } h = -0.866\rho_1$$

$$h = 0 \rightarrow a_{dB} = -6 \text{ dB}$$

$$\text{Približek } h \geq \rho_1 \rightarrow$$

$$a_{dB} \approx -16 \text{ dB} - 20 \text{ dB} \log_{10} \frac{h}{\rho_1}$$

Slabljenje klinaste ovire

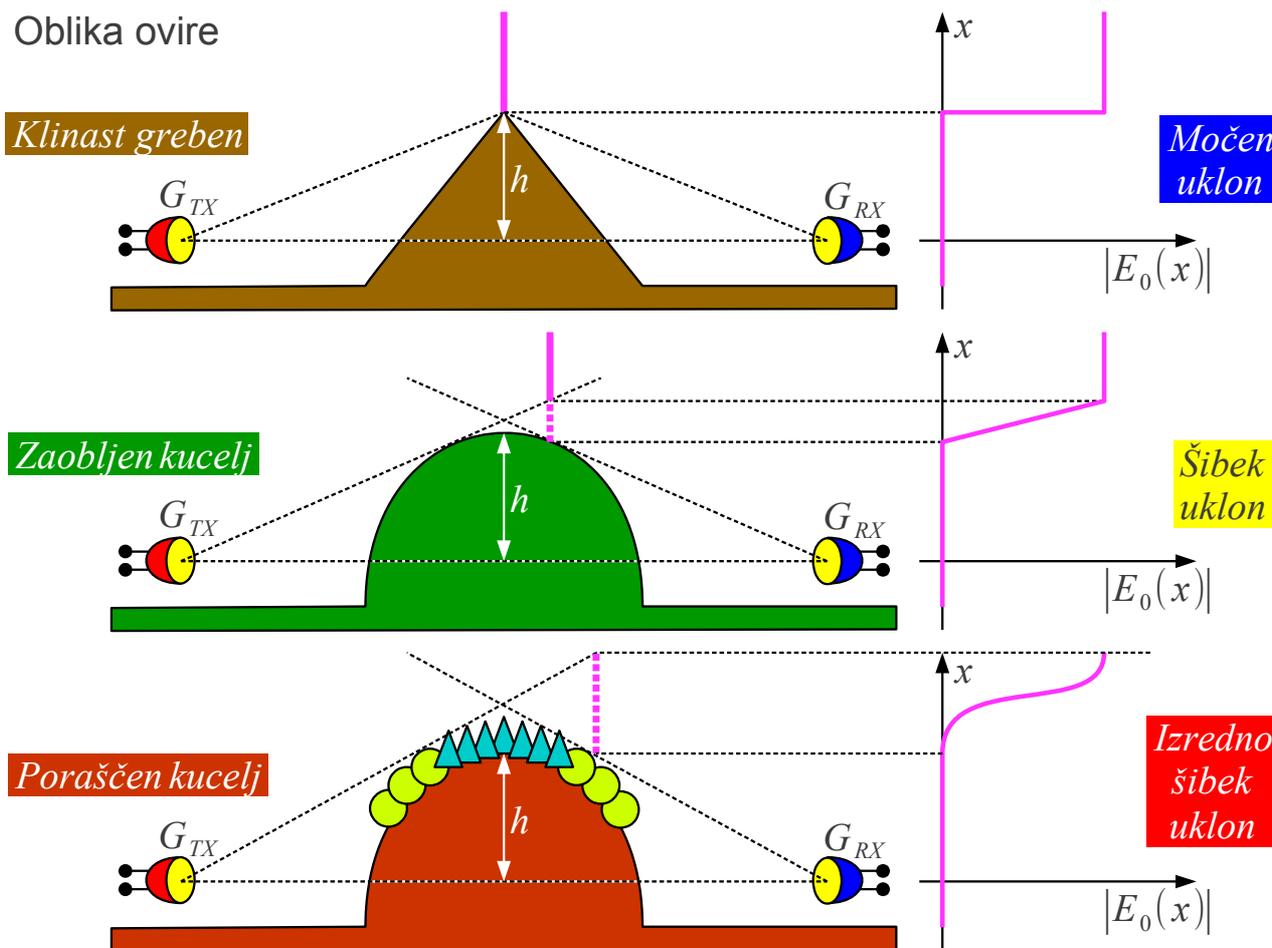


Uklonjeno polje je celo za $a_{MAX} = 1.37 \text{ dB}$ močnejše od neoviranega polja, ko ovira doseže višino $h = -0.866\rho_1$ pod zveznico sprejemnik-oddajnik. Ko vrh ovire doseže zveznico $h = 0$, upade uklonjeno polje na polovico $E = E_\infty/2$ oziroma -6 dB . Ko ovira v celoti zakrije prvo

Fresnelovo cono $h = \rho_1$, upade uklonjeno polje za -16dB .

Za visoke ovire $h > \rho_1$ dobro velja približek uklonskega slabljenja $a_{\text{dB}} \approx -16\text{dB} - 20\text{dB} \log_{10}(h/\rho_1)$. Žal velike naravne ovire $h > 5\rho_1$ običajno preveč odstopajo od brezhibne klinaste oblike, da bi bila uporaba opisane integracije uklonjenega polja oziroma približkov sploh smiselna. Naravne ovire lahko imajo zelo različne oblike:

Oblika ovire



Oster, neporaščeni klinasti greben daje skokovito spremembo polja $E_0(x)$ na navidezni odprtini. Ostra stopnica pomeni močne komponente visokih prostorskih frekvenc pri Fourierjevi transformaciji. Slednje pomenijo močen uklon oziroma točno ustrezajo izpeljanemu rezultatu s klotoido.

Ob vrhu zaobljenega kuclja polje na navidezni odprtini $E_0(x)$ zvezno narašča od nič do polne vrednosti nemotenega polja oddajnika. Zvezno naraščanje pomeni šibke komponente visokih prostorskih frekvenc Fourierjeve transformacije. Slednje pomenijo šibek uklon oziroma dosti višje slabljenje od tistega, kar napoveduje klotoida.

Ob vrhu poraščene kuclja polje na navidezni odprtini $E_0(x)$

narašča zelo blago do polne vrednosti nemotenega polja oddajnika. Slednje pomeni zelo šibke komponente visokih prostorskih frekvenc in izredno šibek uklon. Meritve pokažejo povečanje uklonskega slabljenja za kar -10dB pri valovni dolžini okoli $\lambda \approx 0.7\text{m}$, ko spomladi listavci ozelenijo! Pokončna debela dreves sicer predstavljajo znatno večno oviro za pokončno-polarizirane metrske valove $\lambda \approx 3\text{m}$ kot za vodoravno-polarizirane metrske valove.

Učinek ovire v vsakem primeru ocenjujemo iz razmerja velikosti ovire h/ρ_1 oziroma drugih značilnosti v primerjavi z velikostjo prve Fresnelove cone. Hribi zagotovo nimajo učinka na srednjevalovni radiodifuzni oddajnik z valovno dolžino nekaj sto metrov $\lambda \approx 300\text{m}$, pač pa domet takšnega oddajnika omejuje slabljenje zaradi končne prevodnosti tal.

Hribi se obnašajo kot klinasta ovira za UKV FM oddajnik v meterskem področju valovnih dolžin $\lambda \approx 3\text{m}$, kjer uklon na vrhu hriba omogoča povsem spodoben domet oddajnika. Podobno se stanovanjske hiše obnašajo kot klinasta ovira za mobilni telefon v decimeterskem področju valovnih dolžin. Mobilni telefon s pridom izkorišča uklon na ravnih slemenih hiš.

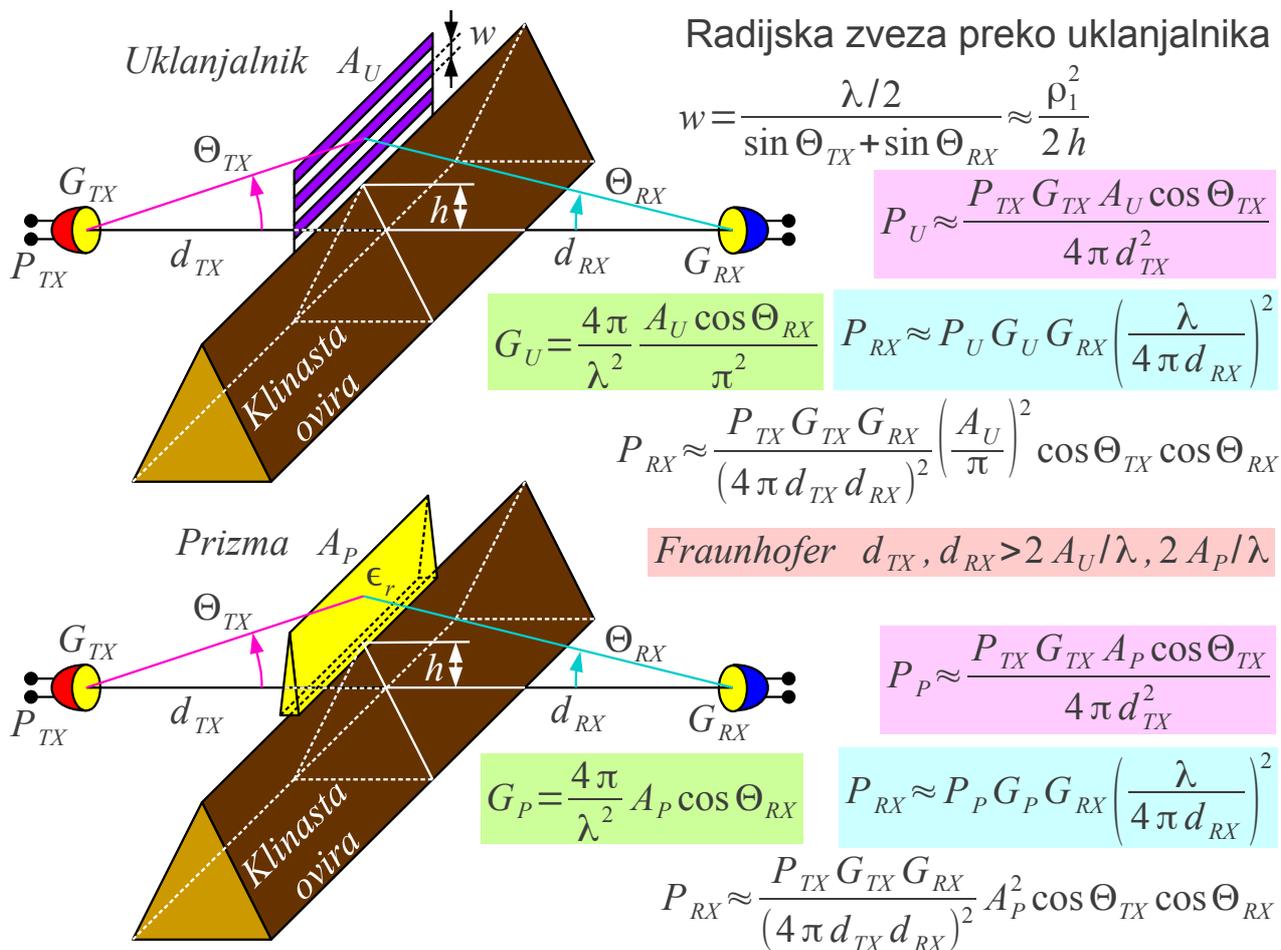
Poraščen hrib je običajno nepremostljiva ovira za mobilni telefon v decimeterskem področju $\lambda \approx 15\text{cm}$. Kakršnikoli hribi so nepremostljiva ovira za mikrovalovno usmerjeno zvezo v centimeterskem področju valovnih dolžin $\lambda \approx 3\text{cm}$, saj je odstopanje oblike hriba od oblike klinaste ovire $\Delta h \gg \rho_1$ dosti večje od polmera prve Fresnelove cone.

Kljub temu lahko mikrovalovno usmerjeno zvezo napeljemo preko vrha hriba, če na vrhu hriba namestimo pasivno napravo, ki sevanje oddajnika lomi (prizma) oziroma odbija (zrcalo) proti sprejemniku v dolino na drugi strani hriba. Za velikost pasivne naprave zadošča $d \approx \rho_1$, da je primerljiva s polmerom prve Fresnelove cone, kar v centimeterskem področju valovnih dolžin ni težko doseči.

Mikrovalovna usmerjena zveza preko zrcala bo natančno obdelana v naslednjem poglavju o odboju valovanja. Snop mikrovalov lahko odklonimo z dielektrično prizmo oziroma z uklanjalnikom. Uklanjalnik (difraktor) je pravzaprav del zbiralne leče s senčenjem vsake druge Fresnelove cone.

Uklanjalnik je sestavljen iz vodoravnih trakov iz mikrovalovom neprozorne snovi (kovine) širine w , ki so postavljeni na medsebojnih razdaljah prav tako w . Širino trakov oziroma razdalje med njimi $w \approx \rho_1^2/(2h)$ omogoča razliko poti $\Delta l = \lambda/2$ med gornjim in spodnjim robom, da zasenči oziroma prepusti polkrog v kazalčnem diagramu. Pri tem ni nujno, da polkrogi v kazalčnem diagramu točno sovpadajo s Fresnelovimi

conami:



Radijsko zvezo preko prizme oziroma preko uklanjalnika računamo na podoben način. Najprej izračunamo moč oddajnika, ki zadene površino prizme A_P oziroma površino uklanjalnika A_U z upoštevanjem projekcije $\cos \Theta_{TX}$. Nato izračunamo dobitke prizme G_P oziroma uklanjalnika G_U , ki seva kot antenska odprtina s projekcijo $\cos \Theta_{RX}$. Senčenje polovice polja in kazalna vsota polkrogov uklanjalniku odžirata faktor $1/\pi^2$ ali skoraj -10dB . Končno zapišemo Friisovo enačbo za radijsko zvezo od prizme oziroma uklanjalnika do sprejemnika.

V končnem rezultatu potrebuje enakovreden uklanjalnik $A_U = \pi A_P$ precej večjo površino od prizme. Površina senčenja uklanjalnika je seveda polovična $A_{\text{senčenja}} = A_U/2 = (\pi/2) A_P$, zato predstavlja uklanjalnik znaten prihranek materiala v primerjavi z dielektrično prizmo, celo v primerjavi s prizmo iz umetnega dielektrika. Primerjava z zrcalom je zahtevnejša, več o tem v naslednjem poglavju.