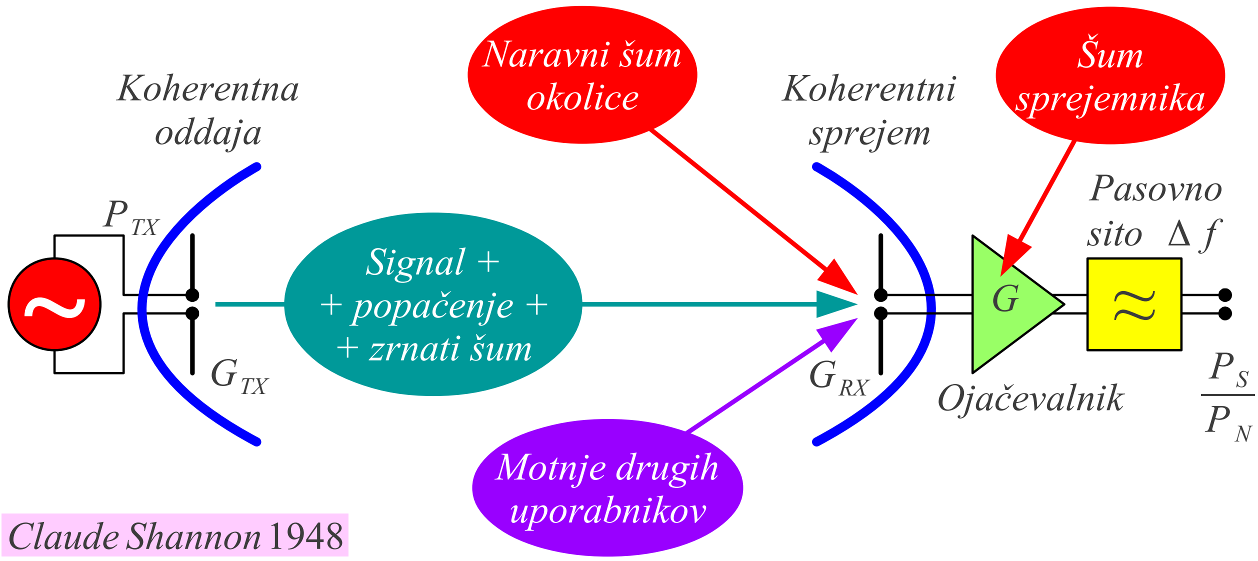
13. Toplotni šum

Domet brezvrvične zveze največkrat opišemo kot razmerje P_{TX}/P_S med močjo oddajnika in močjo signala, ki doseže sprejemnik. Ob upoštevanju dobitkov obeh anten G_{TX} in G_{RX} lahko določimo največjo dosegljivo razdaljo r med oddajnikom in sprejemnikom v praznem prostoru oziroma drugačnih pogojih razširjanja radijskih valov. Iz moči P_S , ki jo zahteva na svojem vhodu sprejemnik, lahko izračunamo potrebno moč oddajnika P_{TX} .

Moč signala P_S na vhodu sprejemnika določata moč šuma P_N in zahtevano razmerje signal/šum $S/N=P_S/P_N$. Claude Shannon je leta 1948 dokazal, da analogno razmerje signal/šum neposredno določa tudi zmogljivost številske zveze:



Claude Shannon 1948

$$C=\Delta f\log_2\left(1+\frac{P_S}{P_N}\right)=\Delta f\log_2\left(1+\frac{P_S}{P_{popačenja}+P_{zrnati}+P_{okolice}+P_{sprejemnika}+P_{motenj}}\right)$$

$\Delta f[\mathrm{Hz}]=B\equiv pasovna\ \ širina$

$P_S[\mathrm{W}]\equiv moč\ \ signala$

$C[\mathrm{bit/s}]\equiv zmogljivost\ \ radijske\ \ zveze$

$P_N[\mathrm{W}]=\Delta f\cdot N_0\equiv moč\ \ šuma$

Zmogljivost radijske zveze

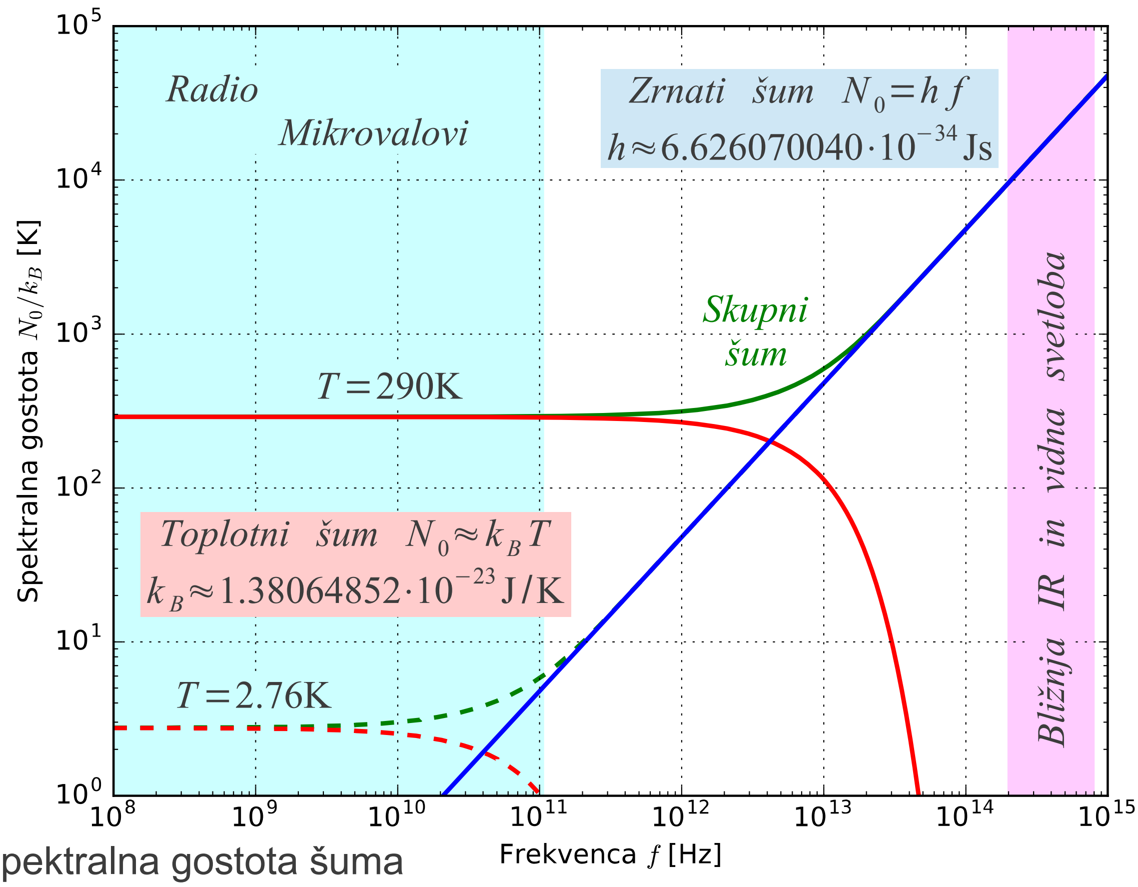
$N_0[\mathrm{W/Hz=J}]\equiv spektralna\ \ gostota\ \ šuma$

V brezvrvični zvezi z elektromagnetnim valovanjem je skupna moč šuma P_N vsota moči različnih pojavov: popačenja signala, moč zrnatega (kvantnega) šuma signala, naravni šum okolice sprejemnika, motnje drugih uporabnikov in šum, ki ga oddaja sam sprejemnik. Popačenje lahko nastane v samem oddajniku oziroma zaradi večpotja pri razširjanju radijskih valov. Elektromagnetno valovanje ni zvezna fizikalna veličina, pač pa je sestavljeno iz določenega števila fotonov, kar daje zrnati šum. Energija fotonov in moč zrnatega šuma naraščata premo-sorazmerno s frekvenco.

Učinkovita izraba radio-frekvenčnega spektra zahteva, da se isti radio-frekvenčni kanali na določeni varni oddaljenosti dodeljujejo dodatnim uporabnikom. Motnje med različnimi uporabniki istih kanalov tedaj niso zanemarljive. Končno omejujeta občutljivost sprejemnika naravni šum okolice in šum samega sprejemnika, ki sta največkrat toplotnega izvora.

Moč šuma in motenj je običajno enakomerno porazdeljena po frekvenčnem spektru. Šum in motnje je zato smiselno opisati s spektralno gostoto moči $N_0[\mathrm{W/Hz}]$. Spektralna gostota moči zrnatega šuma $N_0 = h f$ je zmnožek Planckove konstante in frekvence. Spektralna gostota moči toplotnega šuma je pri nizkih frekvencah (Rayleigh-Jeansov približek) $N_0 = k_B T$ zmnožek Boltzmannove konstante in absolutne temperature:

$$P_N = \Delta f\, N_0 \qquad \Delta f \equiv pasovna\ \ širina \qquad N_0 \equiv spektralna\ \ gostota\ \ šuma$$



Spektralna gostota šuma

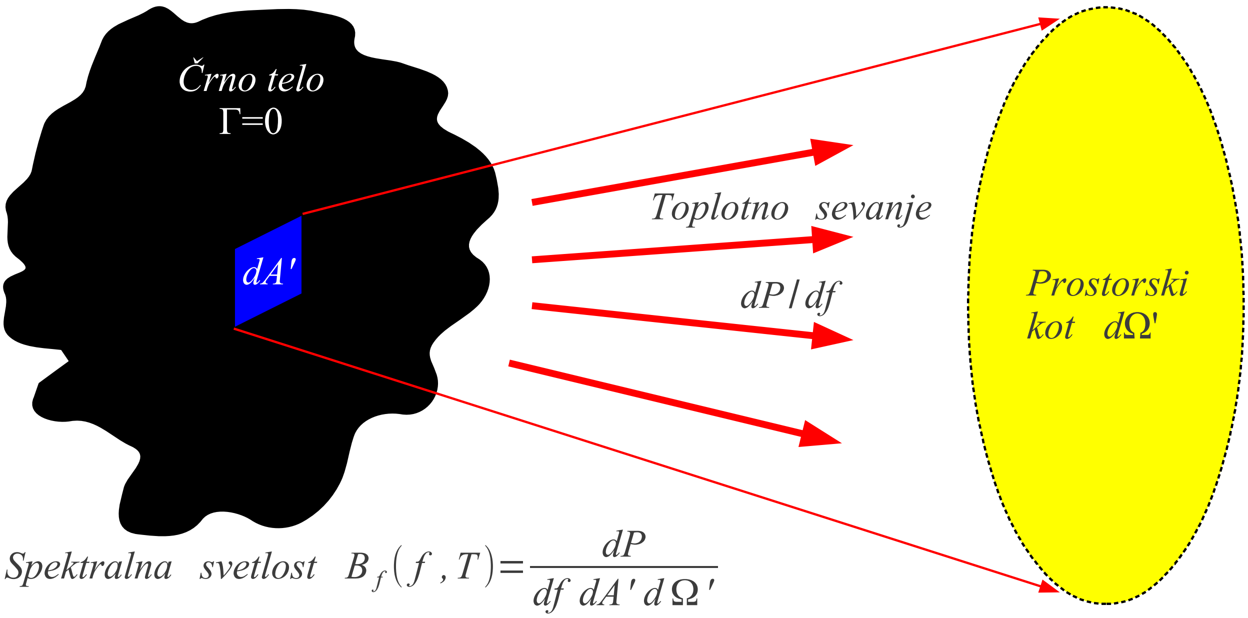
Za lažjo primerjavo sta oba, zrnati in toplotni šum izrisana kot razmerje

$N_0/k_b[\mathrm{K}]$. V področju radijskih valov $f\leq 100\mathrm{GHz}=10^{11}\mathrm{Hz}$ pri sobni temperaturi $T\approx 290\mathrm{K}\approx 17\,°\mathrm{C}$ popolnoma prevladuje toplotni šum nad zrnatim šumom. Celo v najhladnejših delih vesolja s temperaturo $T\approx 2.76\mathrm{K}$ (ostanek prapoka pred 13.8 milijardami let) je zrnati šum opazen šele nad $f>10\mathrm{GHz}=10^{10}\mathrm{Hz}$.

V področju bližnje IR in vidne svetlobe $f\approx 400\mathrm{THz}=4\cdot 10^{14}\mathrm{Hz}$ toplotni šum popolnoma izgine, spektralna gostota zrnatega šuma pa naraste za dva velikostna razreda nad nizkofrekvenčni toplotni šum pri $T\approx 290\mathrm{K}$. Vsota toplotnega šuma brez približkov in zrnatega šuma je zvezna funkcija frekvence, ki začne monotono naraščati v področju med radijskimi valovi in svetlobo, pri sobni temperaturi okoli $f\approx 1\mathrm{THz}=10^{12}\mathrm{Hz}$.

Toplotno sevanje natančno opisuje Planckov zakon. Toplotno sevanje črnega telesa $\Gamma=0$ je največje. Telesa drugačnih barv $|\Gamma|>0$ sevajo manj od črnega telesa, natančneje sorazmerno z $1-|\Gamma|^2$ glede a črno telo. Planckov zakon je običajno zapisan v obliki spektralne svetlosti na dva različna načina: $B_f(f,T)$ v frekvenčnem prostoru oziroma $B_\lambda(\lambda,T)$ v prostoru valovnih dolžin:

Spektralna svetlost $B_f(f,T)$ daje moči toplotnega sevanja dP v frekvenčnem pasu širine df , ki jo seva ploskvica črnega telesa dA' v prostorski kot $d\Omega'$. Pri radijskih frekvencah je energija fotona $hf\ll k_B T$ dosti manjša od toplotne energije. Splošni Planckov zakon je smiselno poenostaviti v Rayleigh-Jeansov približek, kjer Planckova konstanta h ne nastopa več:



Spektralna svetlost $B_f(f,T)=\frac{dP}{df\, dA'\, d\Omega'}$

Planckov zakon $B_f(f,T)=\frac{2hf^3}{c_0^2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{hf}{k_B T}}-1}$

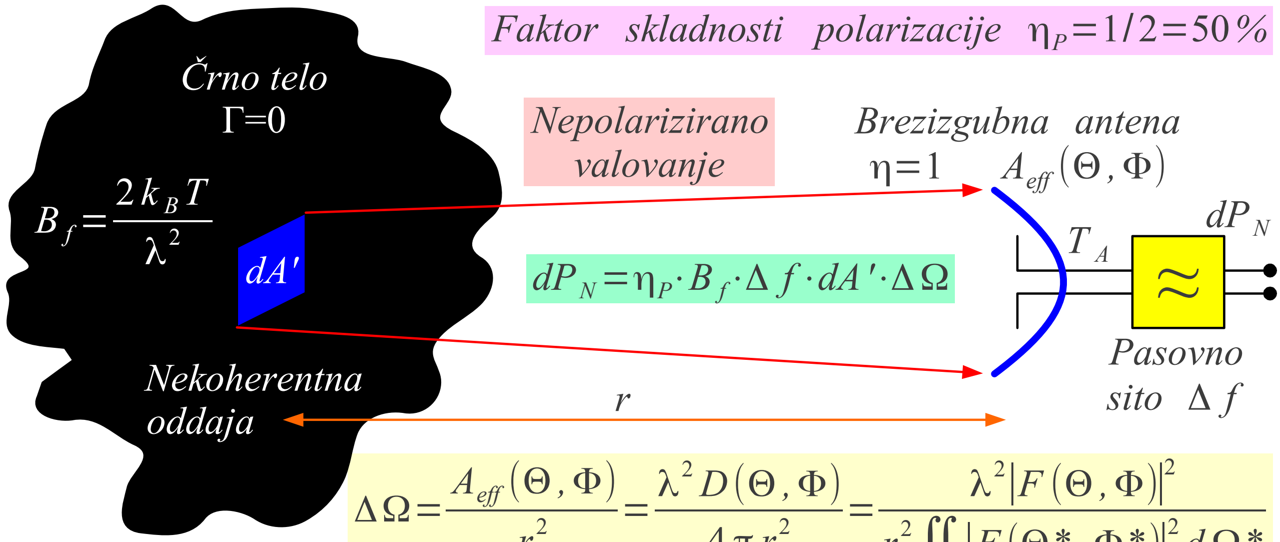
Prazen prostor ϵ_0, μ_0
$c_0=299792458\,\mathrm{m/s}\approx 3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

$hf \ll k_B T$ → *Rayleigh−Jeansov približek* $B_f(f,T)\approx\frac{2k_B T f^2}{c_0^2}=\frac{2k_B T}{\lambda^2}$

Toplotno sevanje črnega telesa

S pomočjo Rayleigh-Jeansovega približka lahko izračunamo moč šuma, ki jo sprejme antena. Pri računanju ne smemo pozabiti, da nismo odkrili nič novega! Fiziki so morali pred mnogimi leti izpeljati isti račun v obratni smeri, da so iz rezultatov številnih različnih meritev najprej prišli do približkov in končno do celotnega Planckovega zakona.

Radijski sprejemnik vsebuje brezizgubno anteno $\eta=1$ in ozko pasovno sito širine $\Delta f \ll f$ glede na osrednjo frekvenco antene oziroma sita. Toplotno sevanje črnega telesa je nepolarizirano valovanje. Kakršnakoli koherentna sprejemna antena daje faktor skladnosti polarizacije $\eta_P=1/2$, torej sprejme natančno polovico sevane moči črnega telesa:



$$\Delta\Omega = \frac{A_{eff}(\Theta, \Phi)}{r^2} = \frac{\lambda^2 D(\Theta, \Phi)}{4\pi r^2} = \frac{\lambda^2 |F(\Theta, \Phi)|^2}{r^2 \iint\limits_{4\pi} |F(\Theta^*, \Phi^*)|^2 d\Omega^*}$$

$$P_N = \iint\limits_{A'} \frac{1}{2} \cdot B_f \cdot \Delta f \cdot dA' \cdot \Delta\Omega$$

$$dA' = r^2 d\Omega$$

$$P_N = \Delta f\, k_B \frac{\iint\limits_{4\pi} T(\Theta, \Phi) |F(\Theta, \Phi)|^2 d\Omega}{\iint\limits_{4\pi} |F(\Theta, \Phi)|^2 d\Omega}$$

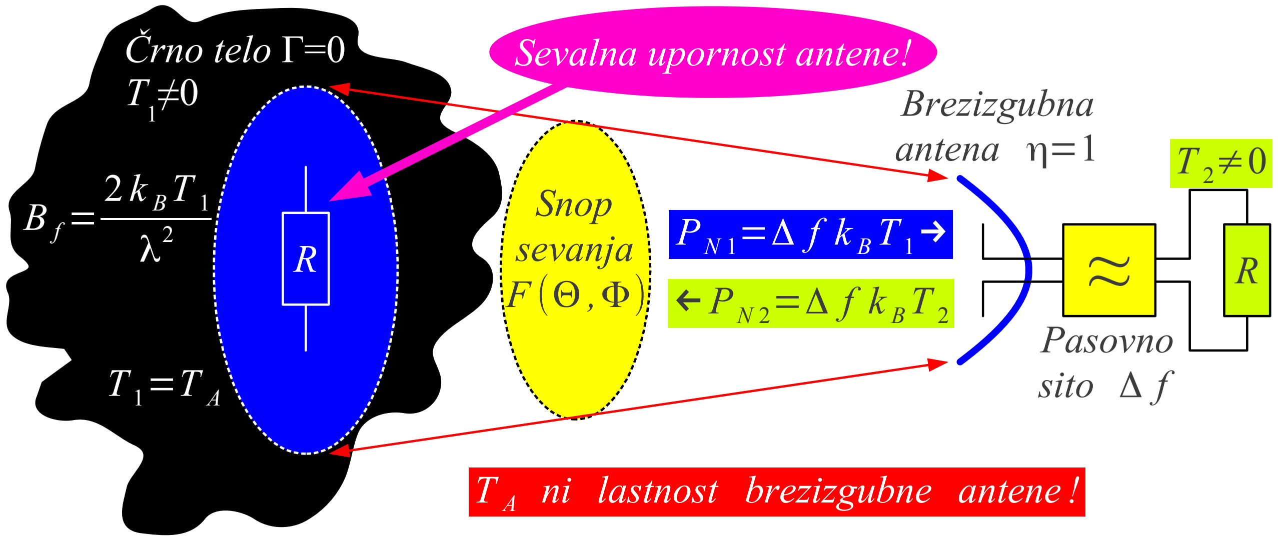
Sprejeta moč toplotnega šuma

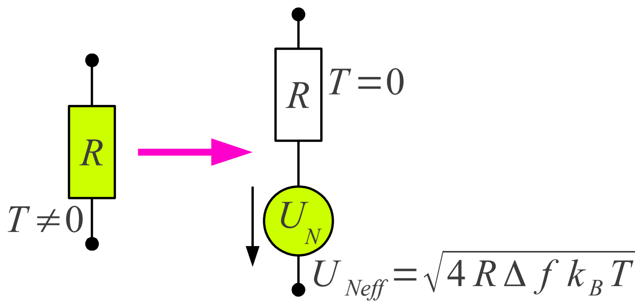
$$P_N = \Delta f\, N_0 = \Delta f\, k_B T_A$$

$$T_A = \frac{\iint\limits_{4\pi} T(\Theta, \Phi) |F(\Theta, \Phi)|^2 d\Omega}{\iint\limits_{4\pi} |F(\Theta, \Phi)|^2 d\Omega}$$

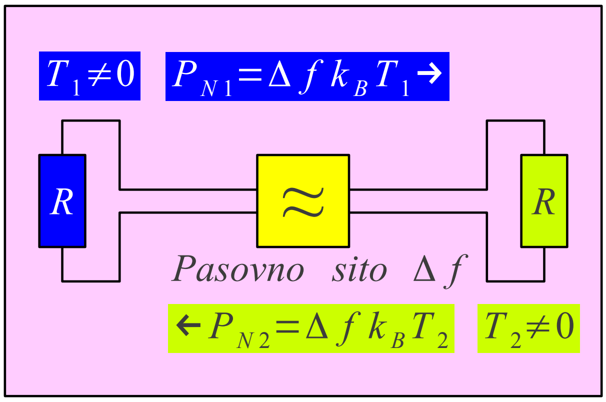
Prostorski kot $\Delta\Omega = A_{eff}(\Theta, \Phi)/r^2$ določa efektivna površina sprejemne antene. $A_{eff}(\Theta, \Phi)$ kot funkcijo smeri izračunamo iz močnostnega smernega diagrama antene $|F(\Theta, \Phi)|^2$. Integracijo po ploskvici črnega telesa $dA' = r^2 d\Omega$ prevedemo v integracijo po prostorskem kotu gledano iz sprejemne antene. Končno dopustimo, da je temperatura črnega telesa $T(\Theta, \Phi)$ funkcija smeri, saj antena vidi v različnih smereh različno tople predmete.

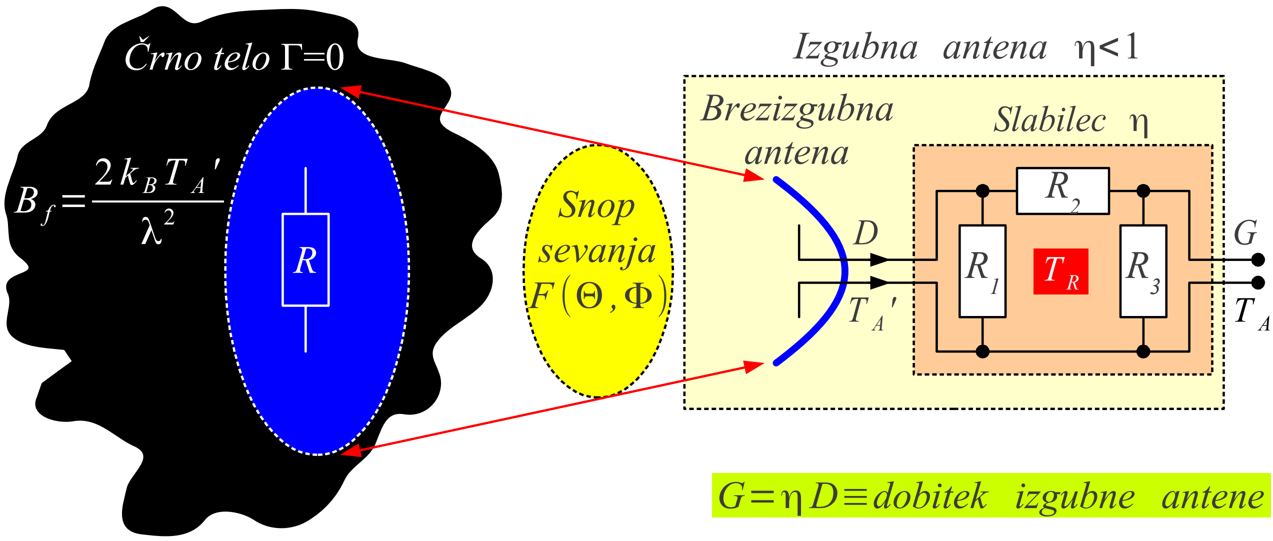
Sprejeta moč šuma P_N je sorazmerna pasovni širini Δf , Boltzmannovi konstanti k_B in povprečju temperature črnega telesa $T(\Theta, \Phi)$, uteženim z močnostnim smernim diagramom antene $|F(\Theta, \Phi)|^2$. Uteženo povprečje temperatur črnega telesa, ki ga vidi sprejemna antena, imenujemo šuma temperatura antene T_A .





Toplotno ravnovesje





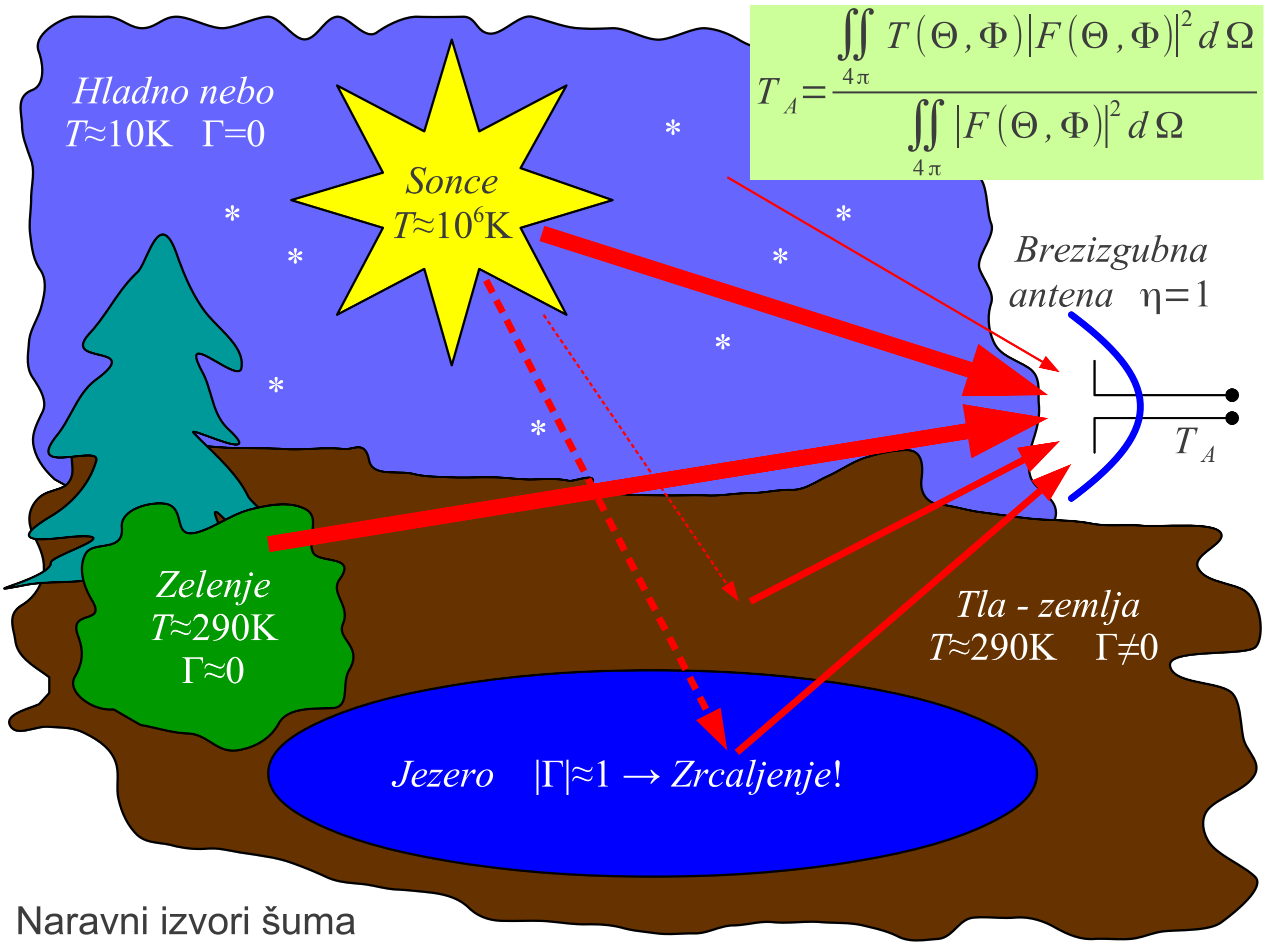
$G = \eta D \equiv$ *dobitek izgubne antene*

$T_A = \eta T_A' + (1-\eta) T_R \equiv$ *šumna temperatura izgubne antene*

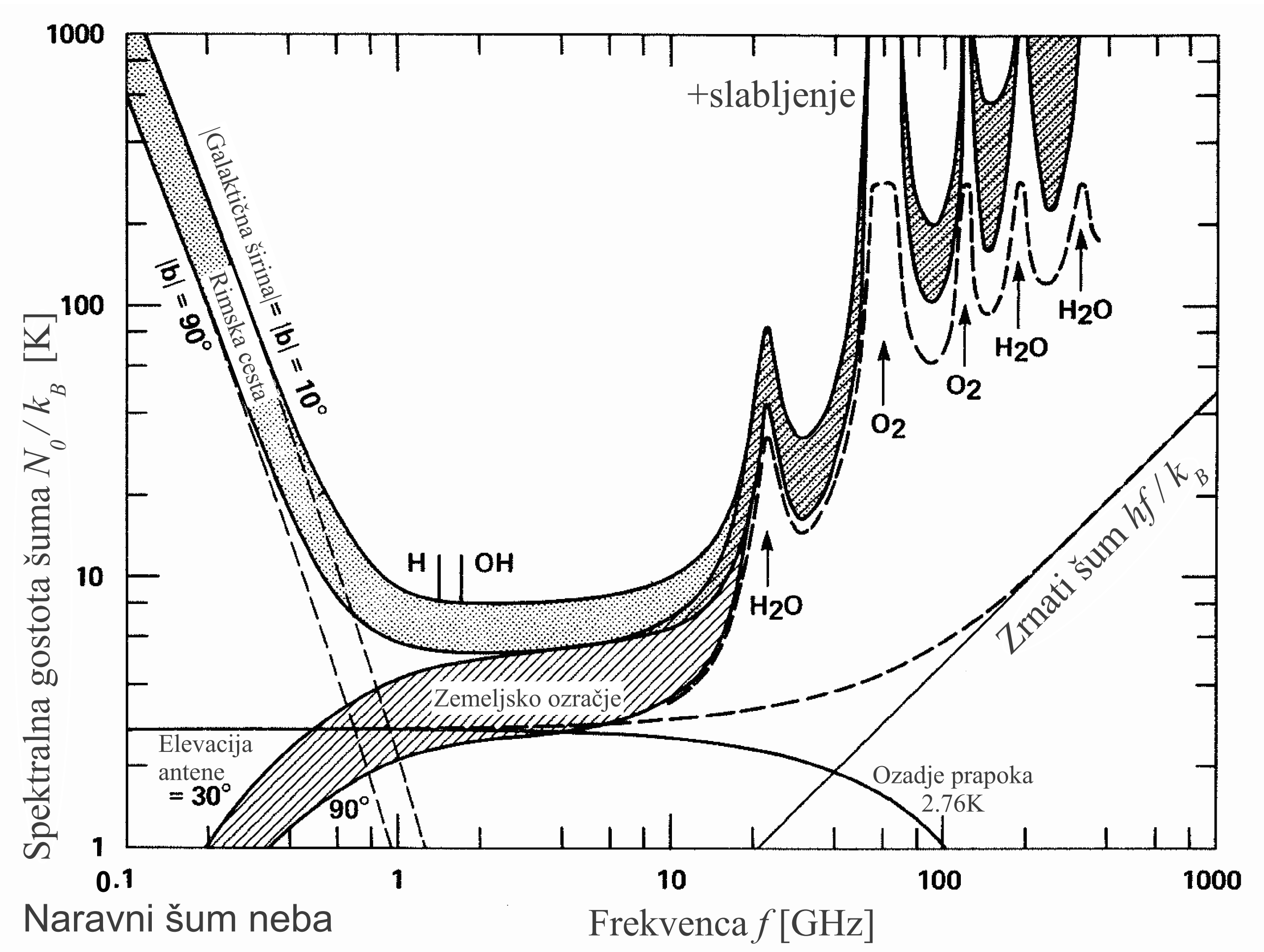
$T_R \approx 290\mathrm{K} \equiv$ *temperatura slabilca*

$$T_A = \eta \left[\frac{\iint_{4\pi} T(\Theta,\Phi) |F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}{\iint_{4\pi} |F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega} \right] + (1-\eta) T_R$$

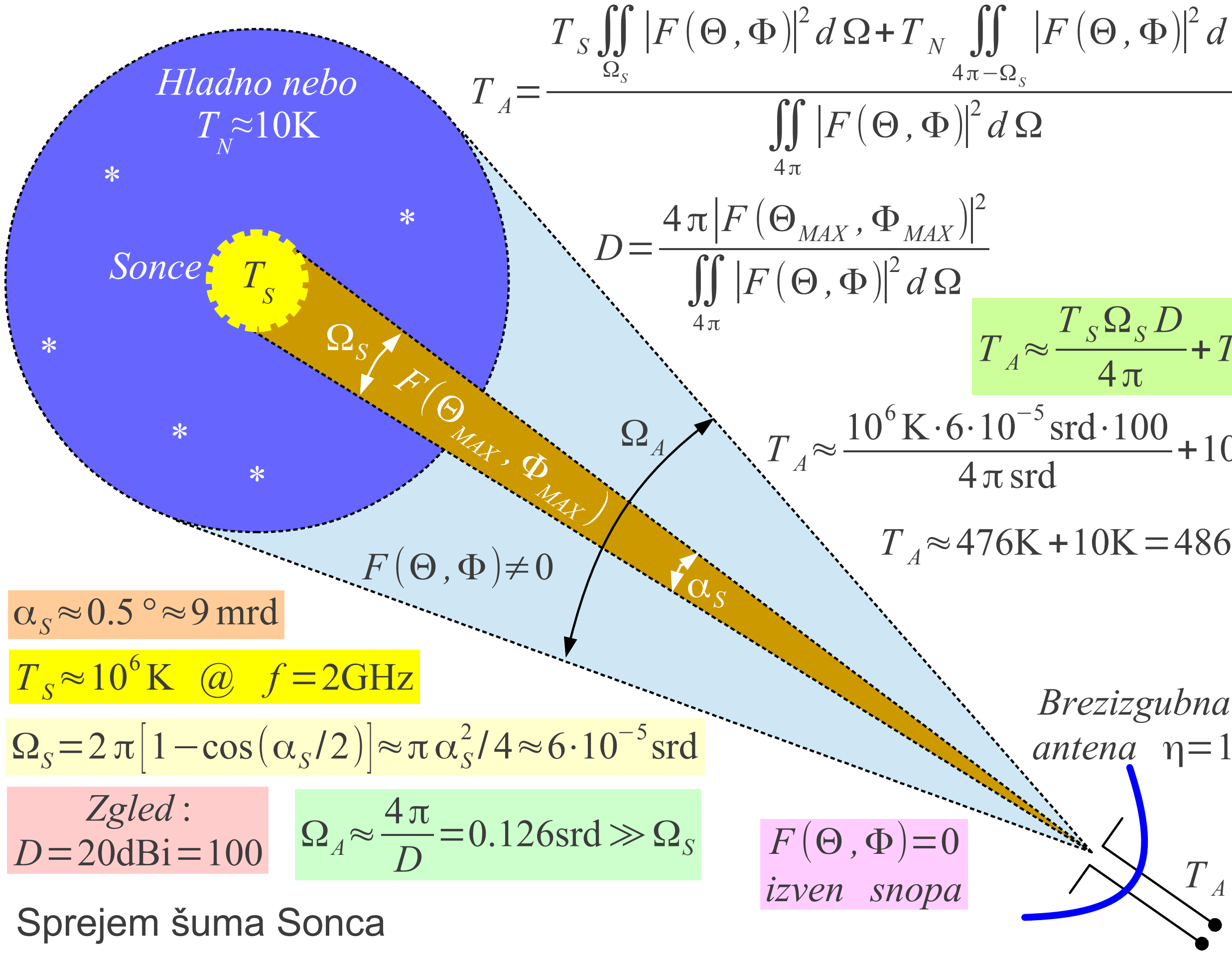
Dobitek in šumna temperatura izgubne antene



Naravni izvori šuma



1000
100
10
1
0.1
1
10
100
1000
Spektralna gostota šuma N_0 / k_B [K]
Frekvenca f [GHz]
+slabljenje
Galaktična širina |b| = 10°
Rimska cesta
|b| = 90°
H
OH
H_2O
O_2
O_2
H_2O
H_2O
Zemeljsko ozračje
Elevacija
antene
= 30°
90°
Zrnati šum hf / k_B
Ozadje prapoka
2.76K
Naravni šum neba



$$T_A = \frac{T_S \iint_{\Omega_S} |F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega + T_N \iint_{4\pi-\Omega_S} |F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}{\iint_{4\pi} |F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}$$

$$D = \frac{4\pi |F(\Theta_{MAX},\Phi_{MAX})|^2}{\iint_{4\pi} |F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}$$

$$T_A \approx \frac{T_S \Omega_S D}{4\pi} + T_N$$

$$T_A \approx \frac{10^6\mathrm{K} \cdot 6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{srd} \cdot 100}{4\pi\,\mathrm{srd}} + 10\mathrm{K}$$

$$T_A \approx 476\mathrm{K} + 10\mathrm{K} = 486\mathrm{K}$$

$\alpha_S \approx 0.5° \approx 9\,\mathrm{mrd}$

$T_S \approx 10^6\mathrm{K}$ @ $f = 2\mathrm{GHz}$

$\Omega_S = 2\pi[1-\cos(\alpha_S/2)] \approx \pi\alpha_S^2/4 \approx 6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{srd}$

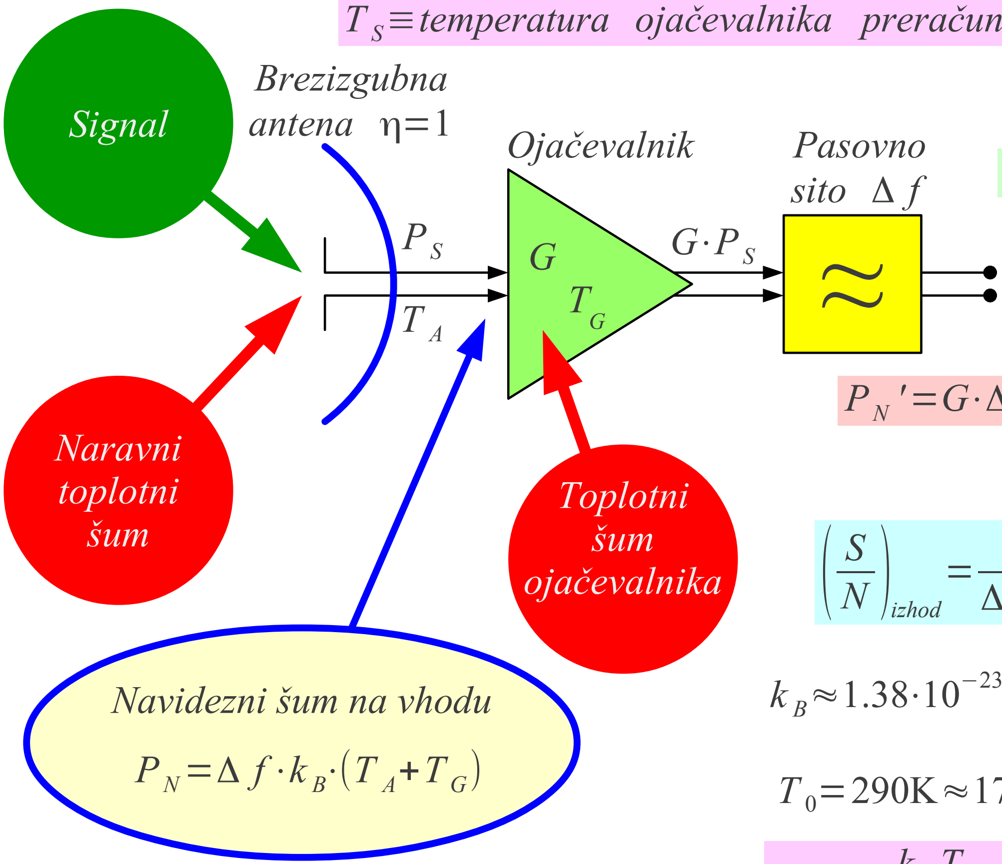
Zgled:
$D = 20\mathrm{dBi} = 100$

$\Omega_A \approx \frac{4\pi}{D} = 0.126\,\mathrm{srd} \gg \Omega_S$

$F(\Theta,\Phi) = 0$
izven snopa

Sprejem šuma Sonca

$T_S \equiv$ *temperatura ojačevalnika preračunana na vhod !*



$$P_S' = G \cdot P_S$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{izhod} = \frac{P_S'}{P_N'}$$

$$P_N' = G \cdot \Delta f \cdot k_B \cdot (T_A + T_G)$$

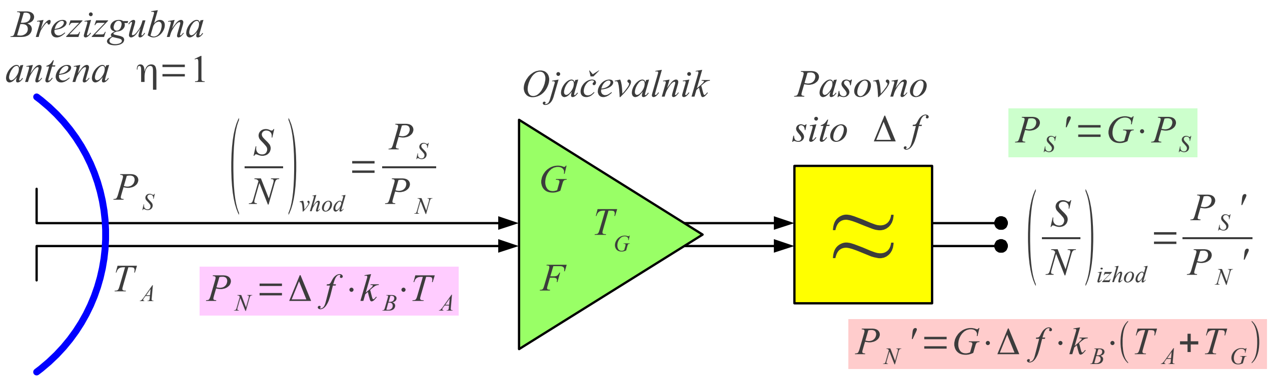
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{izhod} = \frac{P_S}{\Delta f \cdot k_B \cdot (T_A + T_G)}$$

$$k_B \approx 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$$

$$T_0 = 290\,\mathrm{K} \approx 17\,°\mathrm{C}$$

$$10 \log_{10} \frac{k_B T_0}{1\,\mathrm{mJ}} \approx -174\,\mathrm{dBm/Hz}$$

Razmerje signal/šum sprejemnika



Nesmiselna definicija šumnega števila:

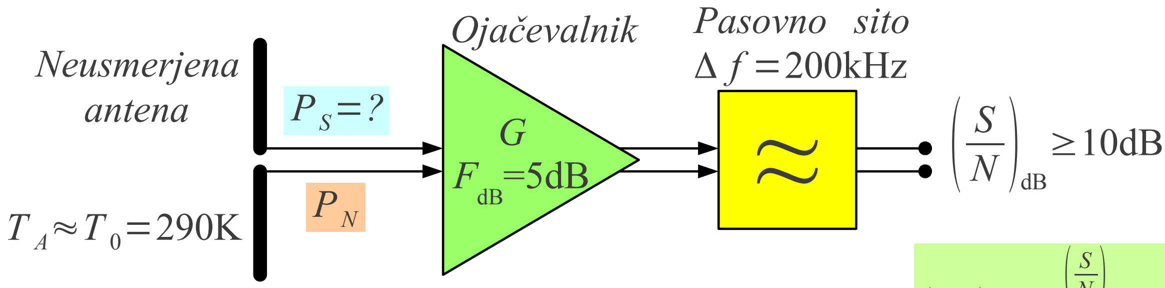
$$F=\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{vhod}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{izhod}}=\frac{\frac{P_S}{\Delta f\, k_B\, T_A}}{\frac{G\,P_S}{G\,\Delta f\, k_B\,(T_A+T_G)}}=\frac{T_A+T_G}{T_A}=1+\frac{T_G}{T_A}$$

Lastnost ojačevalnika ne more biti funkcija T_A!

Smiselna definicija $F=1+\frac{T_G}{T_0}$ @ $T_0=290\mathrm{K}\approx 17\,^\circ\mathrm{C}$ $\leftrightarrow$ $T_G=T_0(F-1)$

Logaritemske enote $F_{\mathrm{dB}}=10\log_{10}F=10\log_{10}\left(1+\frac{T_G}{T_0}\right)$ $\leftrightarrow$ $T_G=T_0\left(10^{\frac{F_{\mathrm{dB}}}{10}}-1\right)$

Šumno število ojačevalnika



$$T_G = T_0 \cdot \left(10^{\frac{F_{\mathrm{dB}}}{10}} - 1\right) = 290\mathrm{K} \cdot (3.162 - 1) = 627\mathrm{K}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right) = 10^{\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{dB}}}{10}} \geq 10$$

$$P_N = \Delta f \cdot k_B \cdot (T_A + T_G) = 200\mathrm{kHz} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot (290\mathrm{K} + 627\mathrm{K}) = 2.53 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{W}$$

$$P_S = P_N \cdot \left(\frac{S}{N}\right) = P_N \cdot 10 = 2.53 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{W}$$

$$P_{S\,\mathrm{dBm}} = 10 \log_{10} \frac{P_S}{1\mathrm{mW}} = -106\mathrm{dBm}$$

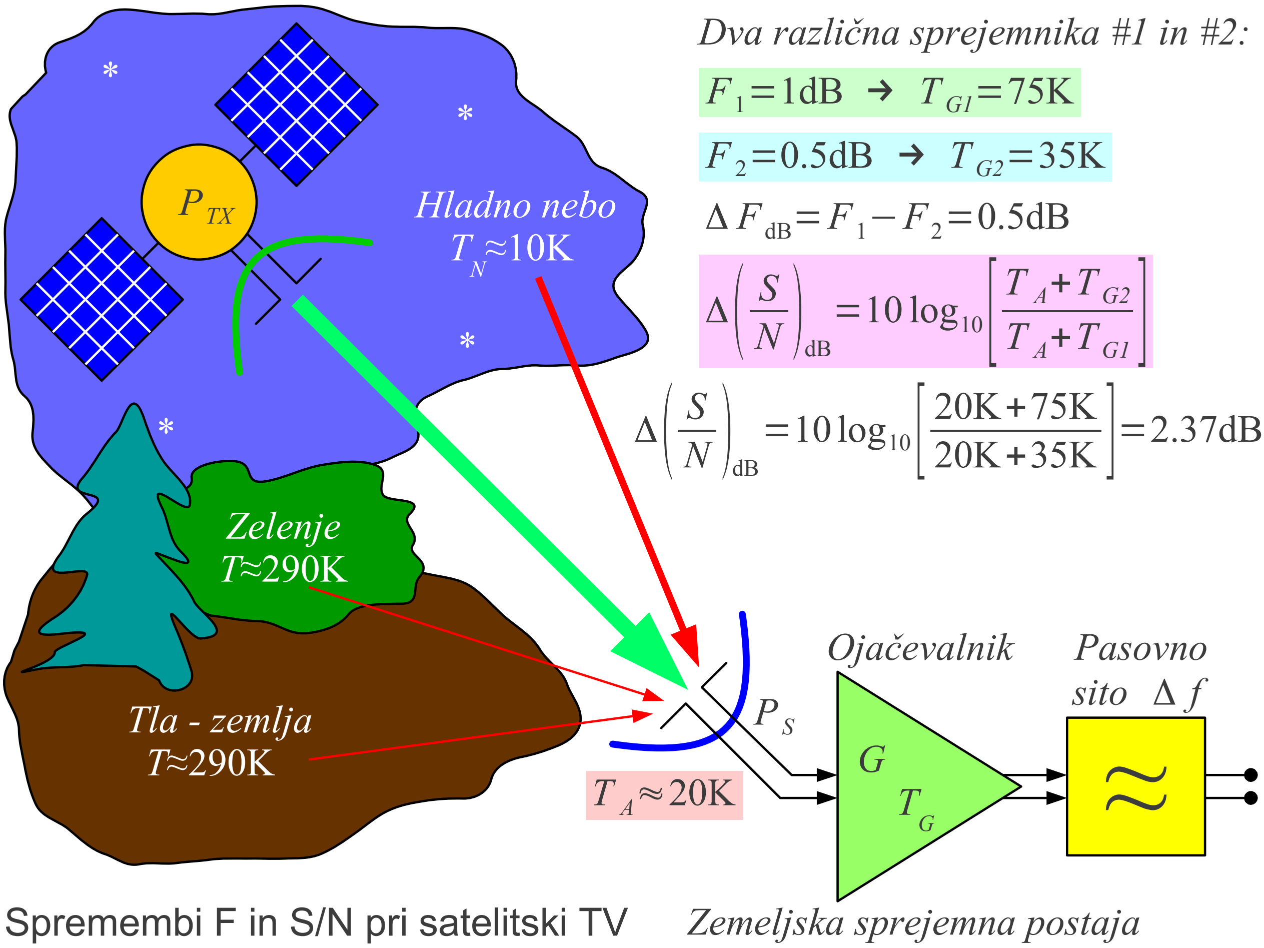
Poenostavljen izračun izključno v primeru $T_A \approx T_0 = 290\mathrm{K}$

$$P_{S\,\mathrm{dBm}} \approx (S/N)_{\mathrm{dB}} + (\Delta f)_{\mathrm{dB \cdot Hz}} + (k_B T_0)_{\mathrm{dBm/Hz}} + F_{\mathrm{dB}}$$

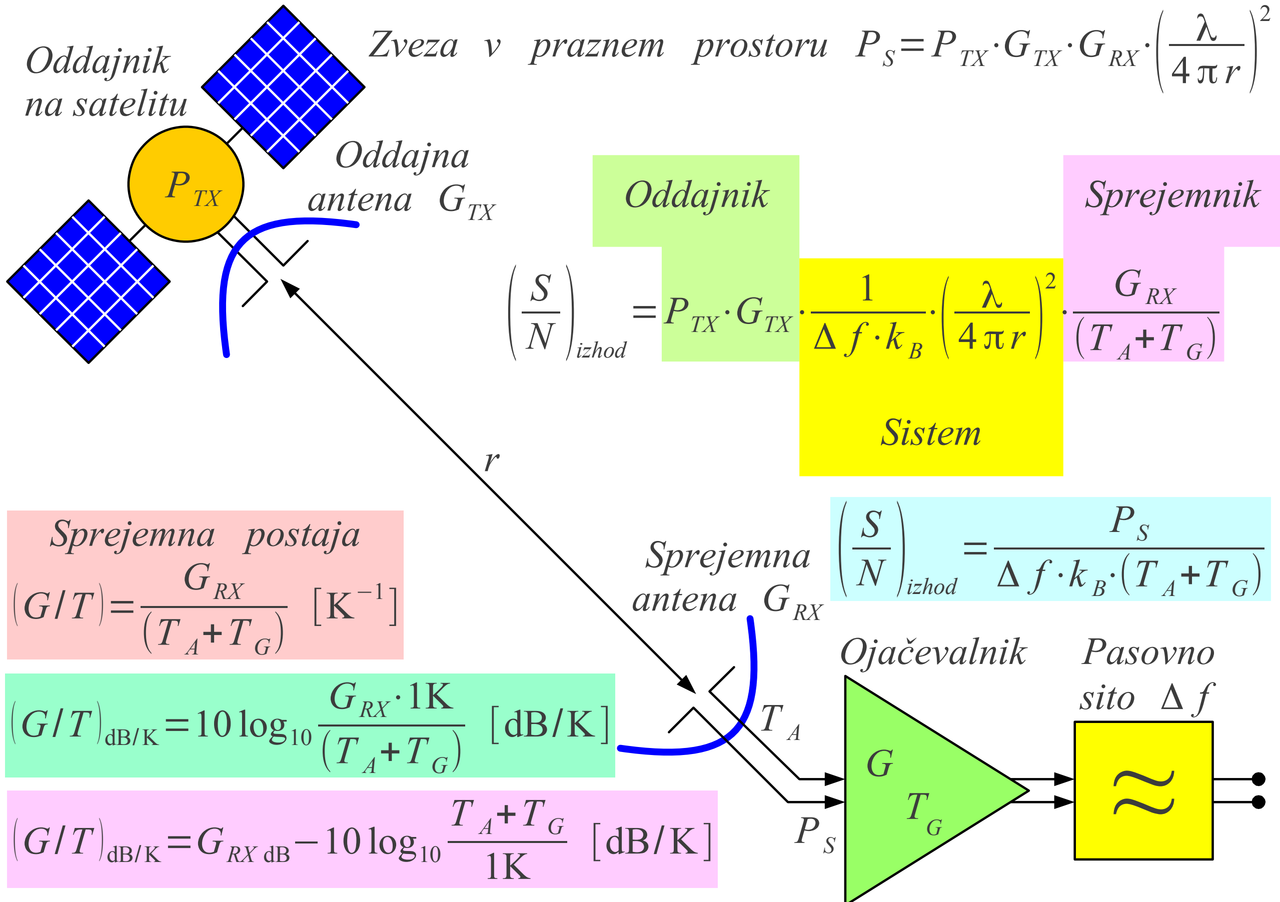
$$(k_B T_0)_{\mathrm{dBm/Hz}} = -174\mathrm{dBm/Hz} \qquad (\Delta f)_{\mathrm{dB \cdot Hz}} = 10 \log_{10}\left(\frac{\Delta f}{1\mathrm{Hz}}\right) = 53\mathrm{dB \cdot Hz}$$

$$P_{S\,\mathrm{dBm}} \approx 10\mathrm{dB} + 53\mathrm{dB \cdot Hz} - 174\mathrm{dBm/Hz} + 5\mathrm{dB} = -106\mathrm{dBm}$$

Občutljivost GSM telefona



Spremembi F in S/N pri satelitski TV



Razmerje G/T sprejemne postaje

* * * * *