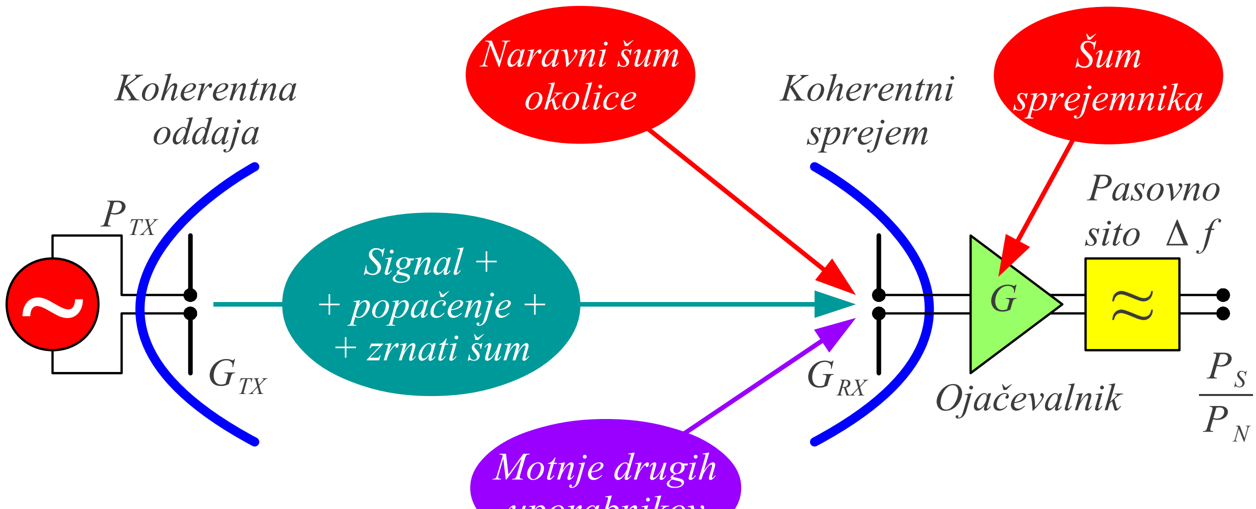
13. Toplotni šum

Domet brezvrvične zveze največkrat opišemo kot razmerje P_{TX}/P_S med močjo oddajnika in močjo signala, ki doseže sprejemnik. Ob upoštevanju dobitkov obeh anten G_{TX} in G_{RX} lahko določimo največjo dosegljivo razdaljo r med oddajnikom in sprejemnikom v praznem prostoru oziroma drugačnih pogojih razširjanja radijskih valov. Iz moči P_S, ki jo zahteva na svojem vhodu sprejemnik, lahko izračunamo potrebno moč oddajnika P_{TX}.

Moč signala P_S na vhodu sprejemnika določata moč šuma P_N in zahtevano razmerje signal/šum $S/N=P_S/P_N$. Claude Shannon je leta 1948 dokazal, da analogno razmerje signal/šum neposredno določa tudi zmogljivost številske zveze:



Claude Shannon 1948

$$C=\Delta f\log_2\left(1+\frac{P_S}{P_N}\right)=\Delta f\log_2\left(1+\frac{P_S}{P_{popačenja}+P_{zrnati}+P_{okolice}+P_{sprejemnika}+P_{motenj}}\right)$$

$\Delta f[\mathrm{Hz}]=B\equiv pasovna\ \ širina$

$P_S[\mathrm{W}]\equiv moč\ \ signala$

$C[\mathrm{bit/s}]\equiv zmogljivost\ \ radijske\ \ zveze$

$P_N[\mathrm{W}]=\Delta f\cdot N_0\equiv moč\ \ šuma$

$N_0[\mathrm{W/Hz=J}]\equiv spektralna\ \ gostota\ \ šuma$

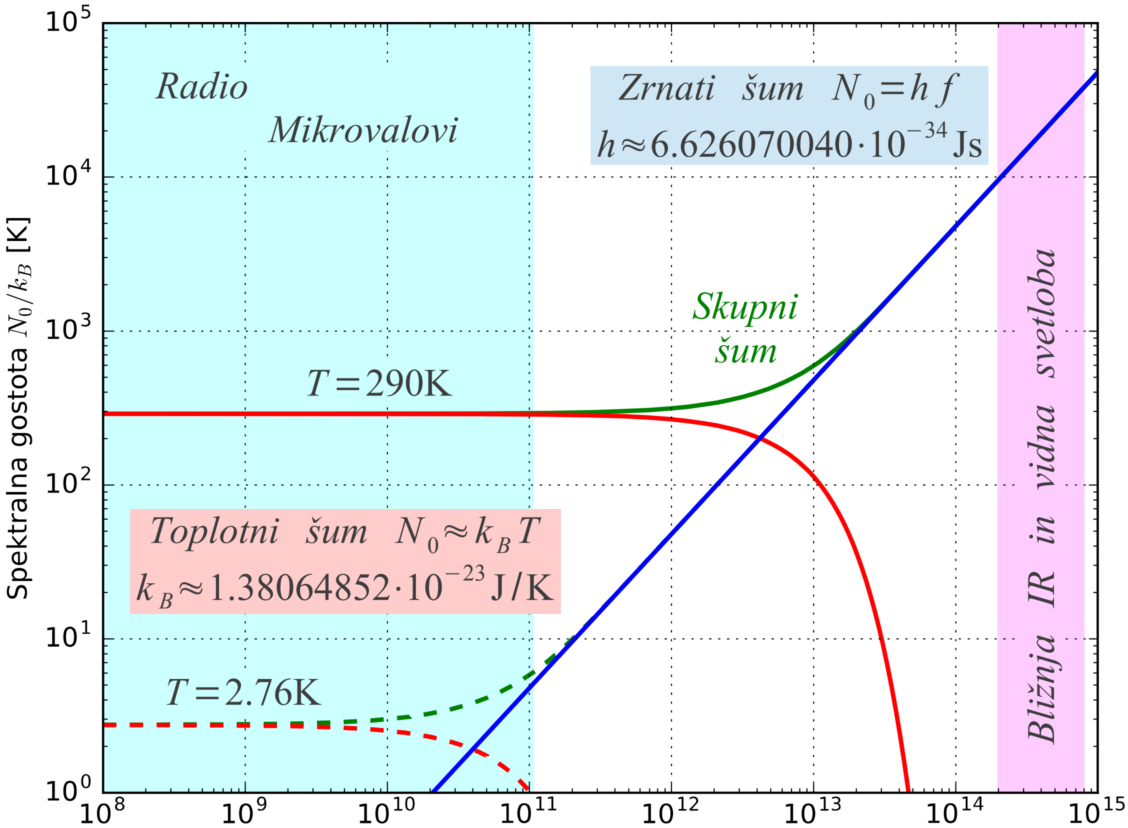
Zmogljivost radijske zveze

V brezvrvični zvezi z elektromagnetnim valovanjem je skupna moč šuma P_N vsota moči različnih pojavov: popačenja signala, moč zrnatega (kvantnega) šuma signala, naravni šum okolice sprejemnika, motnje drugih uporabnikov in šum, ki ga dodaja sam sprejemnik. Popačenje lahko nastane v samem oddajniku oziroma zaradi večpotja pri razširjanju radijskih valov. Elektromagnetno valovanje ni zvezna fizikalna veličina, pač pa je sestavljeno iz določenega števila fotonov, kar povzroča zrnati šum. Energija fotonov in moč zrnatega šuma naraščata premo-sorazmerno s frekvenco.

Učinkovita izraba radio-frekvenčnega spektra zahteva, da se isti radio-frekvenčni kanali na določeni varni oddaljenosti dodeljujejo dodatnim uporabnikom. Motnje med različnimi uporabniki istih kanalov tedaj niso zanemarljive. Končno omejujeta občutljivost sprejemnika naravni šum okolice in šum samega sprejemnika, ki sta največkrat toplotnega izvora.

Moč šuma in motenj je običajno enakomerno porazdeljena po frekvenčnem spektru. Šum in motnje je zato smiselno opisati s spektralno gostoto moči $N_0[\mathrm{W/Hz}]$. Spektralna gostota moči zrnatega šuma $N_0=h\,f$ je zmnožek Planckove konstante in frekvence. Spektralna gostota moči toplotnega šuma je pri nizkih frekvencah (Rayleigh-Jeansov približek) $N_0=k_B T$ zmnožek Boltzmannove konstante in absolutne temperature:

$$P_N=\Delta f\,N_0 \qquad \Delta f \equiv pasovna\ \ širina \qquad N_0 \equiv spektralna\ \ gostota\ \ šuma$$



Spektralna gostota šuma

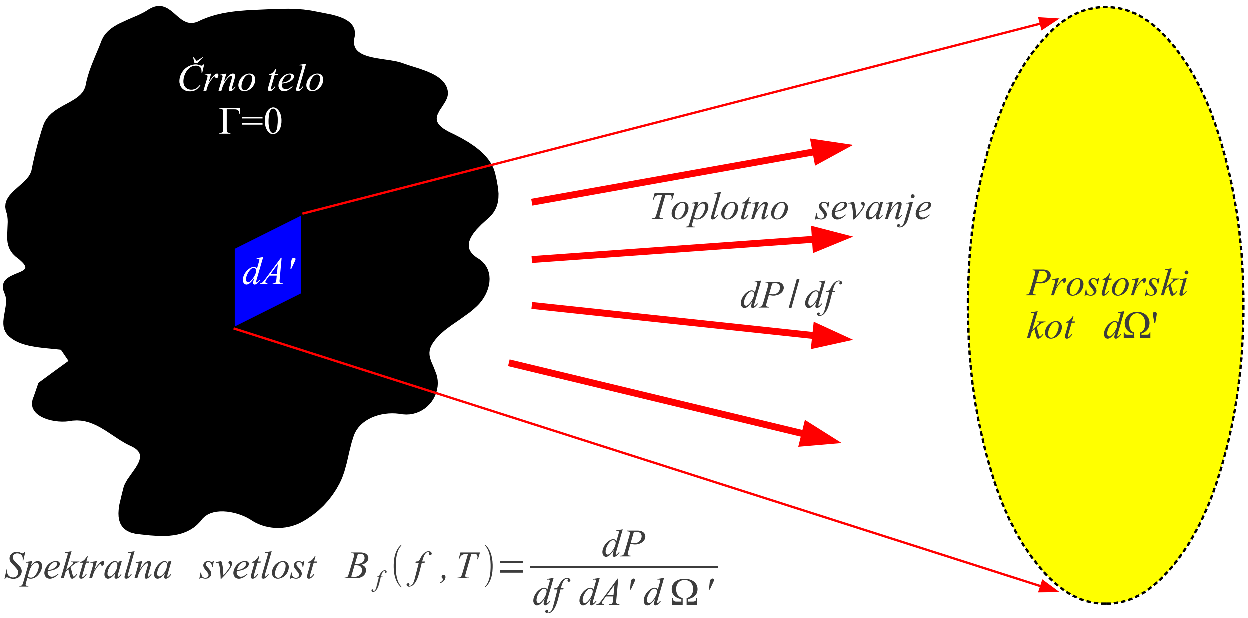
Za lažjo primerjavo sta oba, zrnati in toplotni šum izrisana kot razmerje

$N_0/k_b[\mathrm{K}]$. V področju radijskih valov $f \le 100\mathrm{GHz} = 10^{11}\,\mathrm{Hz}$ pri sobni temperaturi $T \approx 290\mathrm{K} \approx 17\,°\mathrm{C}$ popolnoma prevladuje toplotni šum nad zrnatim šumom. Celo v najhladnejših delih vesolja s temperaturo $T \approx 2.76\mathrm{K}$ (ostanek prapoka pred 13.8 milijardami let) je zrnati šum opazen šele nad $f > 10\mathrm{GHz} = 10^{10}\,\mathrm{Hz}$.

V področju bližnje IR in vidne svetlobe $f \approx 400\mathrm{THz} = 4 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$ toplotni šum popolnoma izgine, spektralna gostota zrnatega šuma pa naraste za dva velikostna razreda nad nizkofrekvenčni toplotni šum pri $T \approx 290\mathrm{K}$. Vsota toplotnega šuma brez približkov in zrnatega šuma je zvezna funkcija frekvence, ki začne monotono naraščati v področju med radijskimi valovi in svetlobo, pri sobni temperaturi nad $f > 1\mathrm{THz} = 10^{12}\,\mathrm{Hz}$.

Toplotno sevanje natančno opisuje Planckov zakon. Toplotno sevanje črnega telesa $\Gamma = 0$ je največje. Telesa drugačnih barv $|\Gamma| > 0$ sevajo manj od črnega telesa, natančneje sorazmerno z $1 - |\Gamma|^2$ glede na črno telo. Hkrati se v telesu, ki ne vpija vsega vpadnega valovanja $|\Gamma| > 0$, vsaj delno zrcali sevanje drugih virov. Planckov zakon je lahko zapisan v obliki spektralne svetlosti na dva različna načina: $B_f(f, T)$ v frekvenčnem prostoru oziroma $B_\lambda(\lambda, T)$ v prostoru valovnih dolžin:

Spektralna svetlost $B_f(f, T)$ opisuje moč toplotnega sevanja dP v frekvenčnem pasu širine df , ki jo seva ploskvica črnega telesa dA' v prostorski kot $d\Omega'$. Pri radijskih frekvencah je energija fotona $h f \ll k_B T$ dosti manjša od toplotne energije. Splošni Planckov zakon je smiselno poenostaviti v Rayleigh-Jeansov približek, kjer Planckova konstanta h ne nastopa več:



$$Spektralna\ \ svetlost\ \ B_f(f,T)=\frac{dP}{df\ dA'\ d\Omega'}$$

$$Planckov\ \ zakon\ \ B_f(f,T)=\frac{2hf^3}{c_0^2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{hf}{k_BT}}-1}$$

$$Prazen\ \ prostor\ \ \epsilon_0,\mu_0$$
$$c_0=299792458\,\mathrm{m/s}\approx 3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

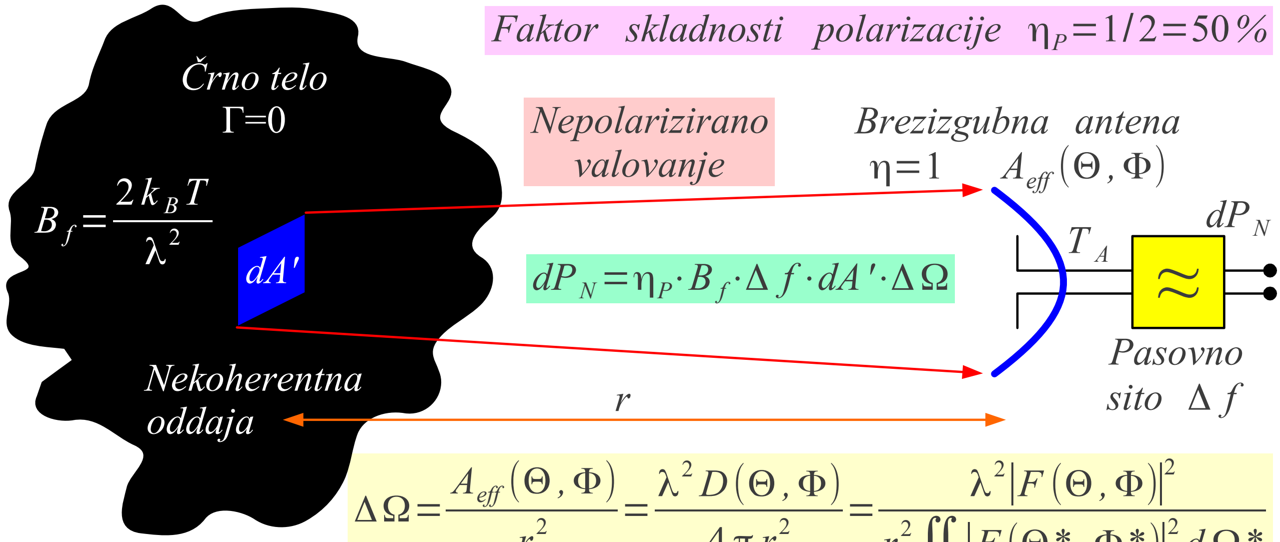
$$hf\ll k_BT\ \rightarrow\ Rayleigh-Jeansov\ \ približek\ \ B_f(f,T)\approx\frac{2k_BTf^2}{c_0^2}=\frac{2k_BT}{\lambda^2}$$

Toplotno sevanje črnega telesa

S pomočjo Rayleigh-Jeansovega približka je smiselno računati delež moči sevanja črnega telesa, ki ga sprejme radijska antena. Pri računanju ne smemo pozabiti, da nismo odkrili nič novega! Fiziki so morali pred mnogimi leti izpeljati isti račun v obratni smeri, da so iz rezultatov številnih različnih meritev najprej prišli do približkov in končno do celotnega Planckovega zakona.

Brezizgubna radijska antena $\eta=1$ sama po sebi nič ne seva, pač pa sevanje drugih virov pretvarja v električni signal na priključku oziroma obratno, električni signal generatorja pretvarja v sevanje v prostoru. Frekvenčna pasovna širina antene je običajno omejena, v radijskem sprejemniku jo še dodatno omejimo s pasovno-prepustnim sitom širine $\Delta f\ll f$ glede na osrednjo frekvenco antene oziroma sita.

Toplotno sevanje črnega telesa je nepolarizirano valovanje. Kakršnakoli koherentna sprejemna antena daje faktor skladnosti polarizacije $\eta_P=1/2$. Antena torej sprejme natančno polovico sevane moči črnega telesa, ki zadene njeno efektivno površino $A_{eff}(\Theta,\Phi)$. Preostala polovica sevanja črnega telesa ima pravokotno polarizacijo glede na sprejemno anteno:



$$\Delta\Omega=\frac{A_{eff}(\Theta,\Phi)}{r^2}=\frac{\lambda^2 D(\Theta,\Phi)}{4\pi r^2}=\frac{\lambda^2|F(\Theta,\Phi)|^2}{r^2\iint_{4\pi}|F(\Theta^*,\Phi^*)|^2 d\Omega^*}$$

$$P_N=\iint_{A'}\frac{1}{2}\cdot B_f\cdot\Delta f\cdot dA'\cdot\Delta\Omega$$

$$dA'=r^2 d\Omega$$

$$P_N=\Delta f\, k_B\frac{\iint_{4\pi}T(\Theta,\Phi)|F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}{\iint_{4\pi}|F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}$$

Sprejeta moč toplotnega šuma

$$P_N=\Delta f\, N_0=\Delta f\, k_B T_A$$

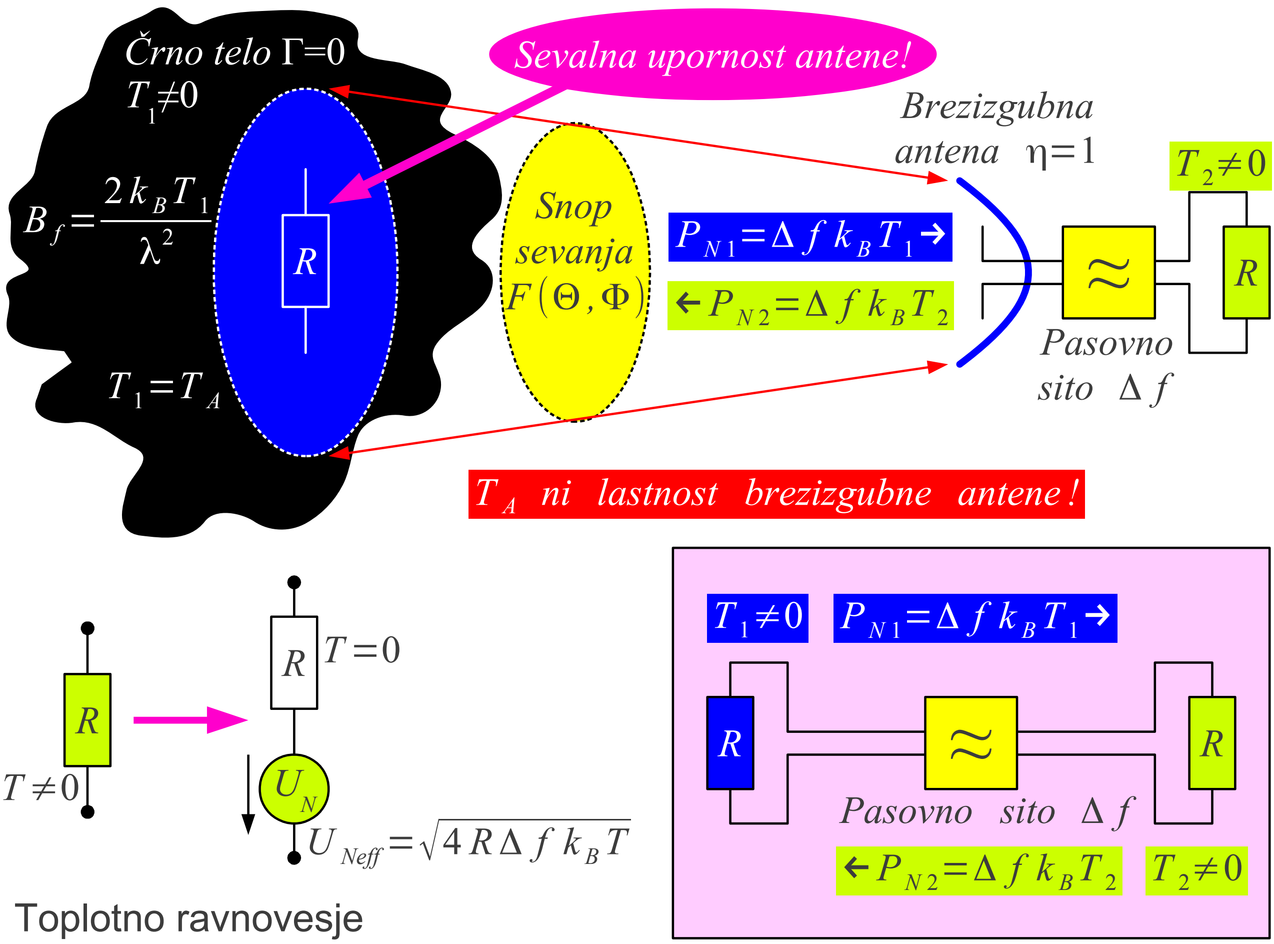
$$T_A=\frac{\iint_{4\pi}T(\Theta,\Phi)|F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}{\iint_{4\pi}|F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}$$

Prostorski kot $\Delta\Omega=A_{eff}(\Theta,\Phi)/r^2$ določa efektivna površina sprejemne antene. $A_{eff}(\Theta,\Phi)$ kot funkcijo smeri izračunamo iz močnostnega smernega diagrama antene $|F(\Theta,\Phi)|^2$. Integracijo po ploskvici črnega telesa $dA'=r^2 d\Omega$ prevedemo v integracijo po prostorskem kotu gledano iz sprejemne antene. Končno dopustimo, da je temperatura črnega telesa $T(\Theta,\Phi)$ funkcija smeri, saj antena vidi v različnih smereh različno tople predmete.

Sprejeta moč šuma P_N je sorazmerna pasovni širini Δf, Boltzmannovi konstanti k_B in povprečju temperature črnega telesa $T(\Theta,\Phi)$, uteženim z močnostnim smernim diagramom antene $|F(\Theta,\Phi)|^2$. Uteženo povprečje temperatur črnega telesa $T(\Theta,\Phi)$, ki ga vidi sprejemna antena, imenujemo šuma temperatura antene T_A.

Enačba $P_N=\Delta f\, k_B T$ hkrati pove, kolikšno električno moč proizvaja poljuben upor R na od nič različni temperaturi $T\neq 0$ v pasovni širini Δf. Poljuben upor na temperaturi $T\neq 0$ lahko torej nadomestimo z zaporedno vezavo hladnega upora R in napetostnega izvora naključnega signala šuma efektivne vrednosti $U_{Neff}=\sqrt{4R\Delta f k_B T}$. Opisani vir daje največjo moč prilagojenemu bremenu $\Gamma=0$, torej še enemu enakemu uporu R .

Če dva enaka upora R povežemo preko pasovno-prepustnega sita Δf , pošilja upor na temperaturi $T_1\neq 0$ moč $P_{N1}=\Delta f k_B T_1$ drugemu uporu. Slednji na temperaturi $T_2\neq 0$ vrača prvemu moč $P_{N2}=\Delta f k_B T_2$. Ker izvora naključnega signala šuma nista sinhronizirana med sabo, je skupni pretok moči skozi pasovno-prepustno sito Δf kar razlika moči $P_{N1}-P_{N2}$. Slednja je usmerjena tako, da stremi k izenačenju $T_1=T_2$ temperatur obeh uporov:



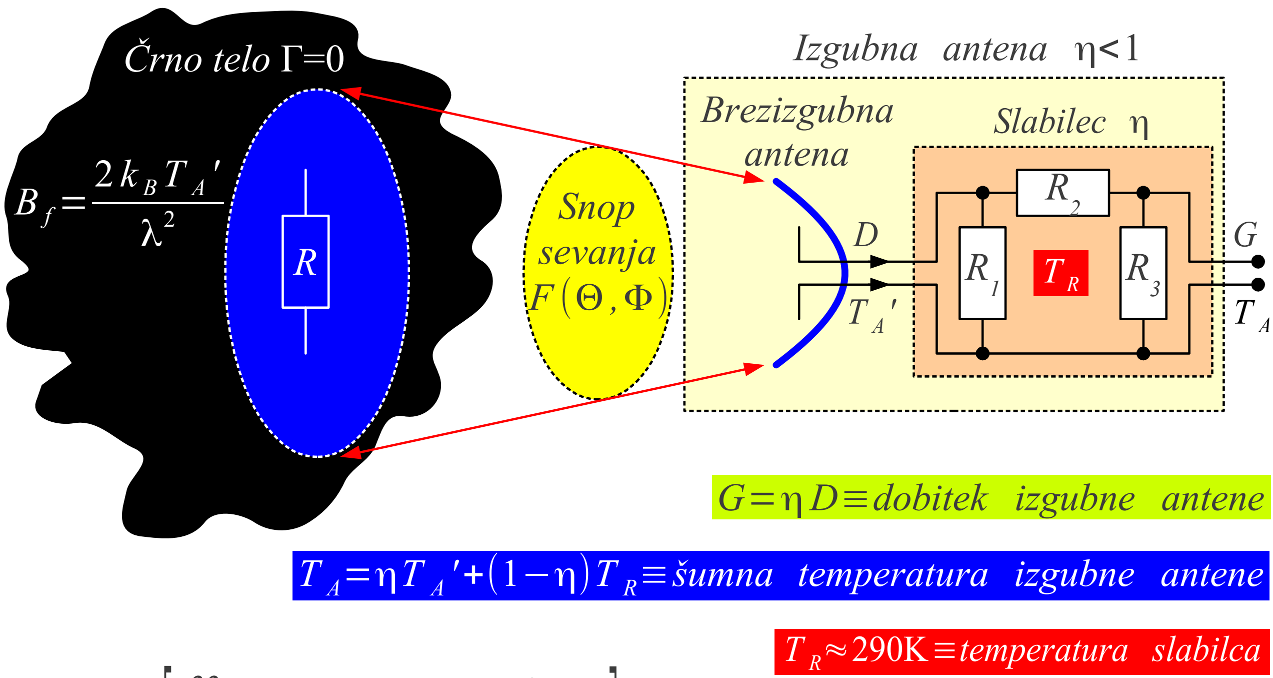
Toplotno ravnovesje

Brezizgubna radijska antena $\eta=1$ in pasovno-prepustno sito Δf sta samo posrednika med črnim telesom na temperaturi $T_1=T_A\neq 0$ in bremenom R na temperaturi $T_2\neq 0$, na katerega je priključena antena. Pretok moči je največji, ko antena vidi črno telo ($\Gamma=0$ za valovanje v praznem prostoru) in je hkrati breme $R=R_S$ prilagojeno sevalni upornosti antene ($\Gamma=0$ za valovanje na električnem prenosnem vodu). Razlika moči

$P_{N1}-P_{N2}$ med črnim telesom in uporom je usmerjena tako, da stremi k izenačenju $T_1=T_2$ temperatur črnega telesa in upora.

Opisana razlaga hkrati pojasnjuje fizikalni pomen sevalne upornosti antene R_S. Upornost R_S se ne nahaja v sami anteni, pač pa v črnem telesu $\Gamma=0$, ki ga antena vidi v svojem smernem diagramu $F(\Theta,\Phi)$. Črno telo je tudi izredno oddaljeno temno nebo, kjer je treba res dolgo čakati več milijard let, da se valovanje kjerkoli odbije in vrne nazaj v anteno. Obratno, če brezizgubno anteno $\eta=1$ zapremo v končno veliko kovinsko ohišje z brezhibno zrcalnimi stenami $|\Gamma|=1$, se vsa izsevana moč vrne nazaj v anteno in gre sevalna upornost antene $R_S\rightarrow 0$ proti nič!

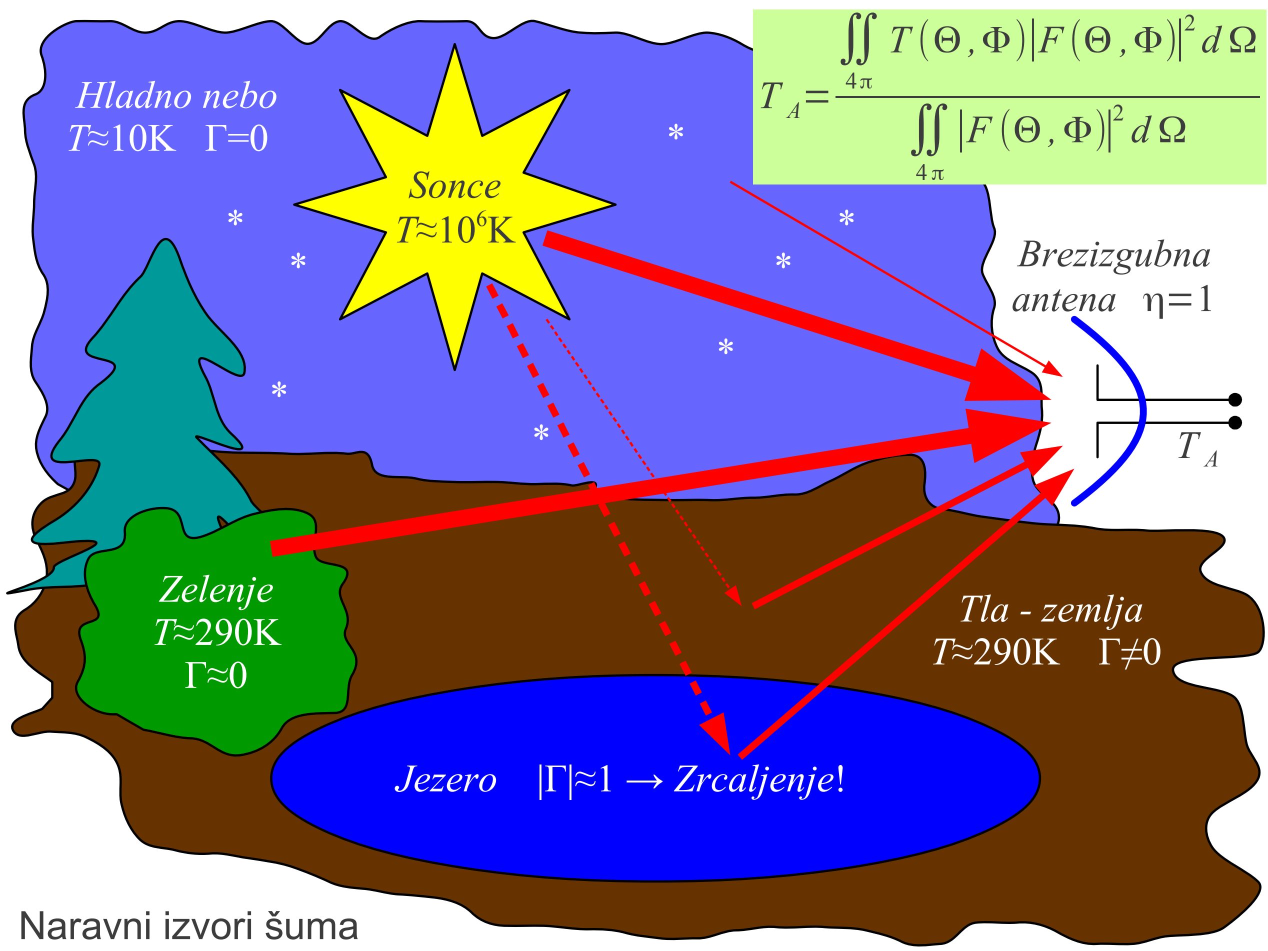
Šuma temperatura antene T_A torej ni lastnost brezizgubne antene $\eta=1$, pač pa lastnost predmetov v vidnem polju smernega diagrama antene $F(\Theta,\Phi)$. Dobro načrtovana antena ima sevalni izkoristek $\eta\approx 1$ blizu enote. Resnično anteno s sevalnim izkoristkom izkoristkom manjšim od enote $\eta<1$ sicer natančno opisuje zaporedna vezava brezizgubne antene in prilagojenega slabilca η iz uporov R_1, R_2 in R_3:



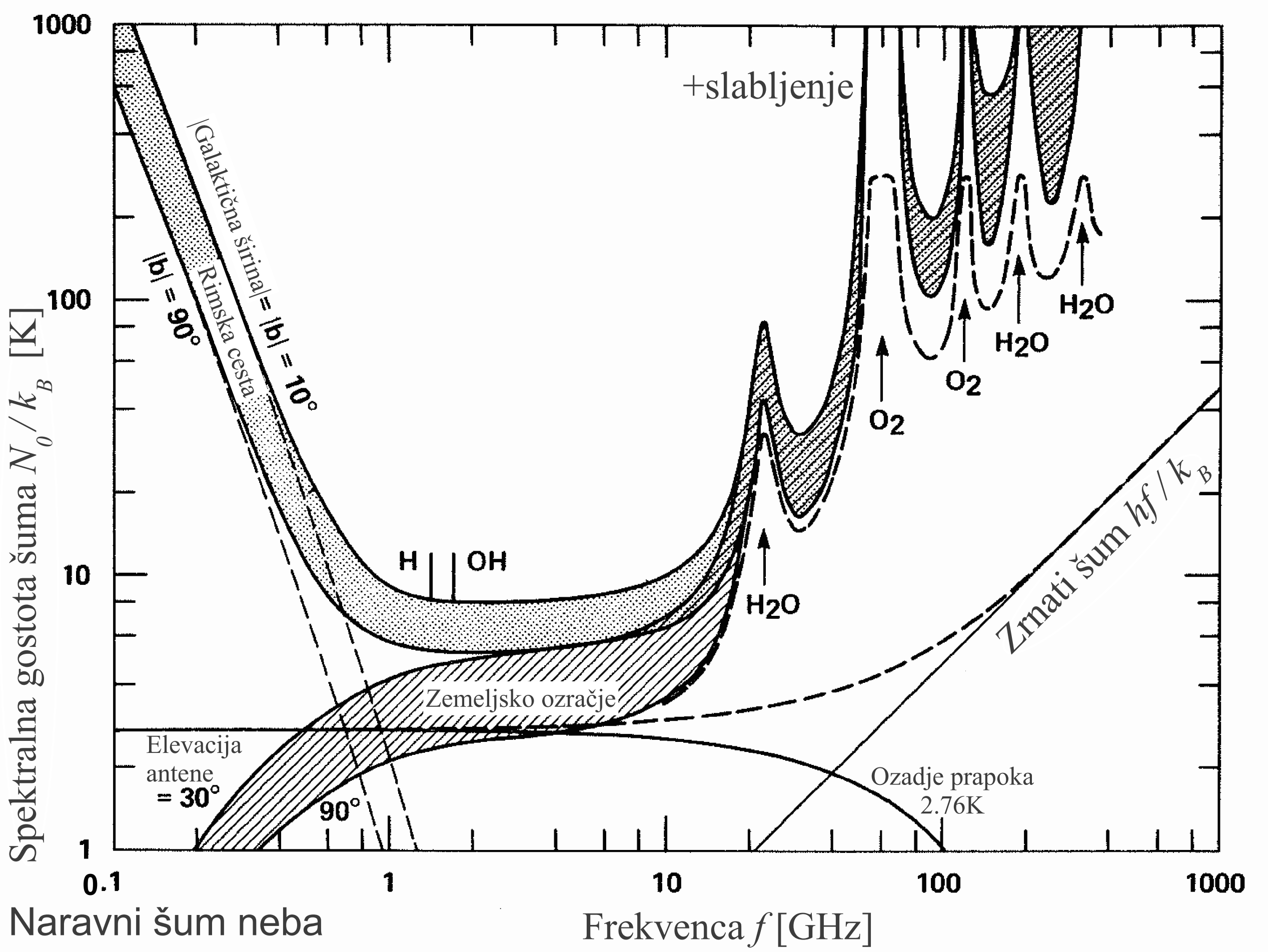
$$T_A=\eta\left[\frac{\iint\limits_{4\pi}T(\Theta,\Phi)|F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}{\iint\limits_{4\pi}|F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}\right]+(1-\eta)T_R$$

Dobitek in šumna temperatura izgubne antene

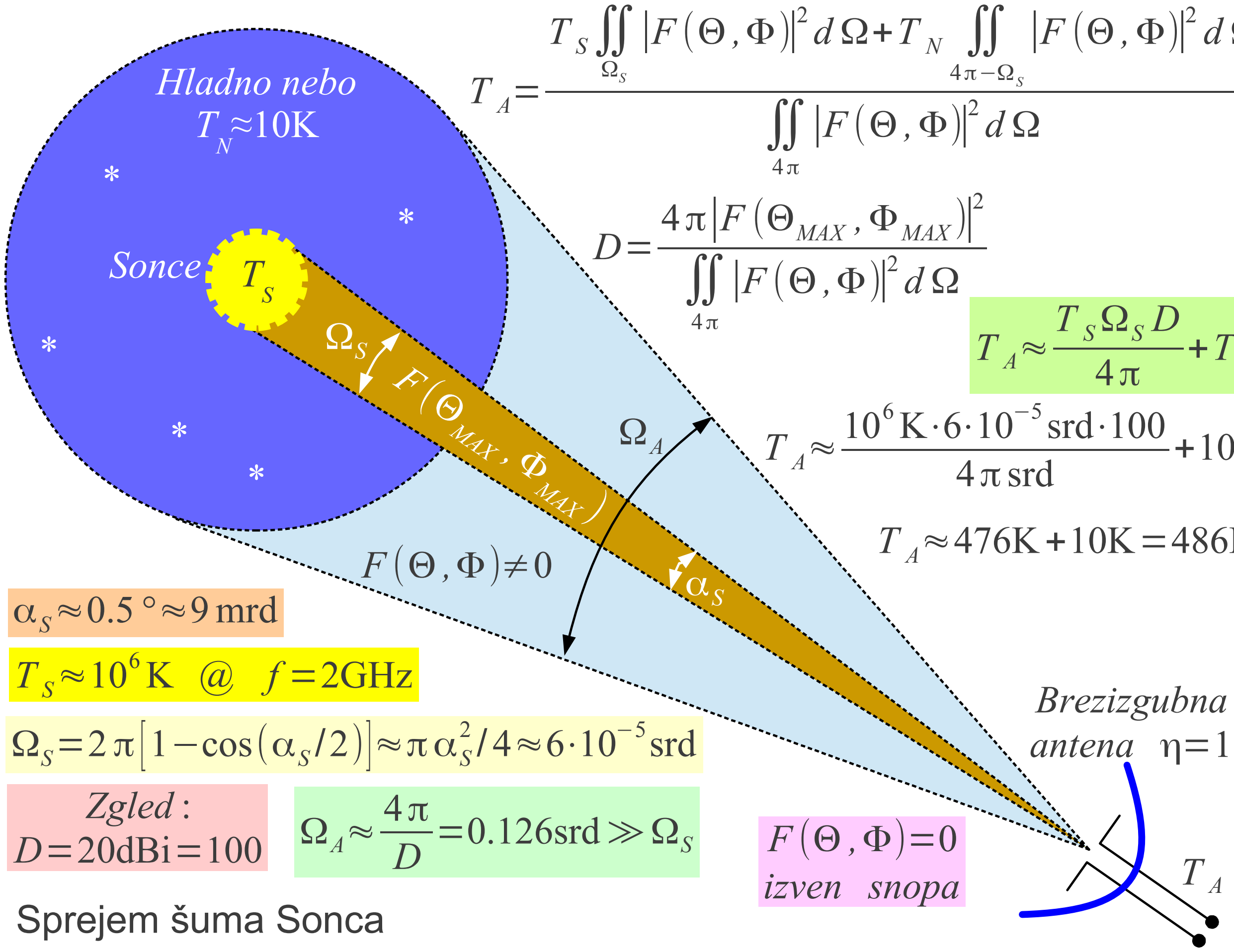
Sevalni izkoristek $\eta<1$ odžira dobitek $G=\eta D$ izgubne antene in odžira šum, ki ga sevajo predmeti v vidnem polju antene. Izgube v konstrukciji antene, ki jih ponazarjajo upori slabilca R_1 , R_2 in R_3 , hkrati dodajajo šum lastnega toplotnega sevanja, saj je temperatura konstrukcije antene $T_R\neq 0$ različna od nič! Temperatura konstrukcije antene $T_R\approx 290\mathrm{K}$ je običajno blizu temperature predmetov oziroma ozračja v neposredni okolici antene.



Naravni izvori šuma



Naravni šum neba



$$T_A = \frac{T_S \iint_{\Omega_S} |F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega + T_N \iint_{4\pi-\Omega_S} |F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}{\iint_{4\pi} |F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}$$

$$D = \frac{4\pi |F(\Theta_{MAX}, \Phi_{MAX})|^2}{\iint_{4\pi} |F(\Theta,\Phi)|^2 d\Omega}$$

$$T_A \approx \frac{T_S \Omega_S D}{4\pi} + T_N$$

$$T_A \approx \frac{10^6\,\mathrm{K} \cdot 6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{srd} \cdot 100}{4\pi\,\mathrm{srd}} + 10\mathrm{K}$$

$$T_A \approx 476\mathrm{K} + 10\mathrm{K} = 486\mathrm{K}$$

$\alpha_S \approx 0.5° \approx 9\,\mathrm{mrd}$

$T_S \approx 10^6\,\mathrm{K}$ @ $f = 2\mathrm{GHz}$

$\Omega_S = 2\pi[1 - \cos(\alpha_S/2)] \approx \pi\alpha_S^2/4 \approx 6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{srd}$

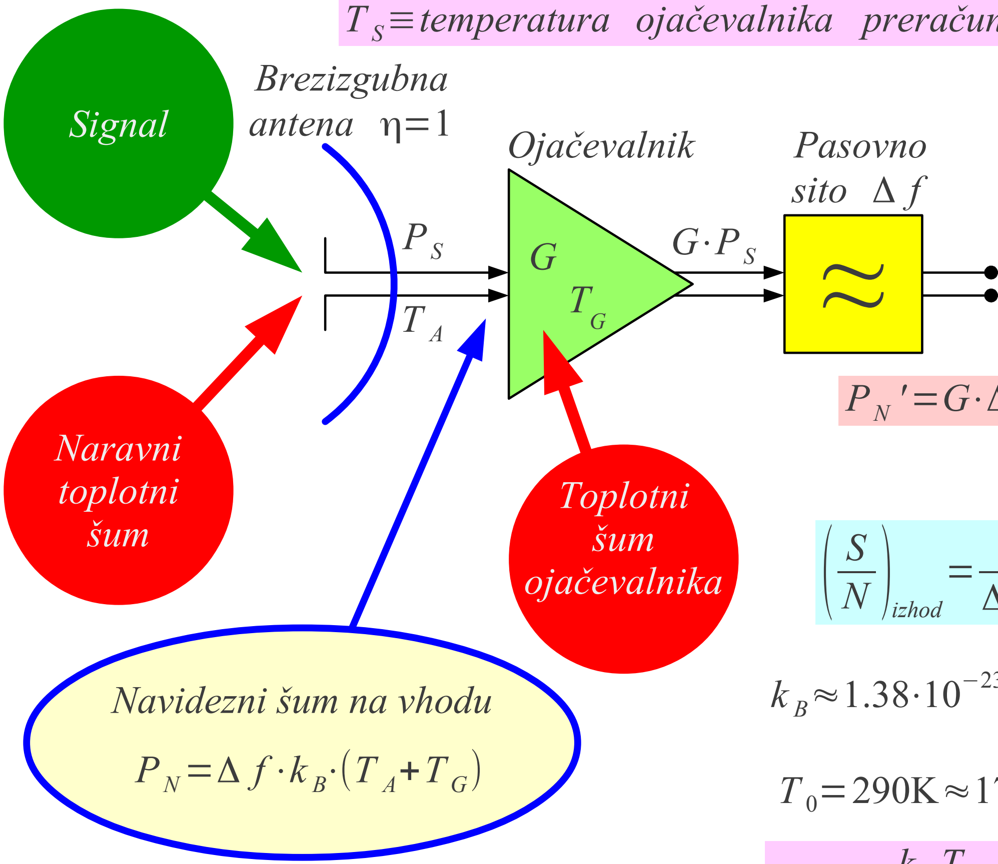
Zgled:
$D = 20\mathrm{dBi} = 100$

$\Omega_A \approx \frac{4\pi}{D} = 0.126\,\mathrm{srd} \gg \Omega_S$

$F(\Theta, \Phi) = 0$ *izven snopa*

Sprejem šuma Sonca

$T_S \equiv$ *temperatura ojačevalnika preračunana na vhod !*



$P_S' = G \cdot P_S$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{izhod} = \frac{P_S'}{P_N'}$$

$P_N' = G \cdot \Delta f \cdot k_B \cdot (T_A + T_G)$

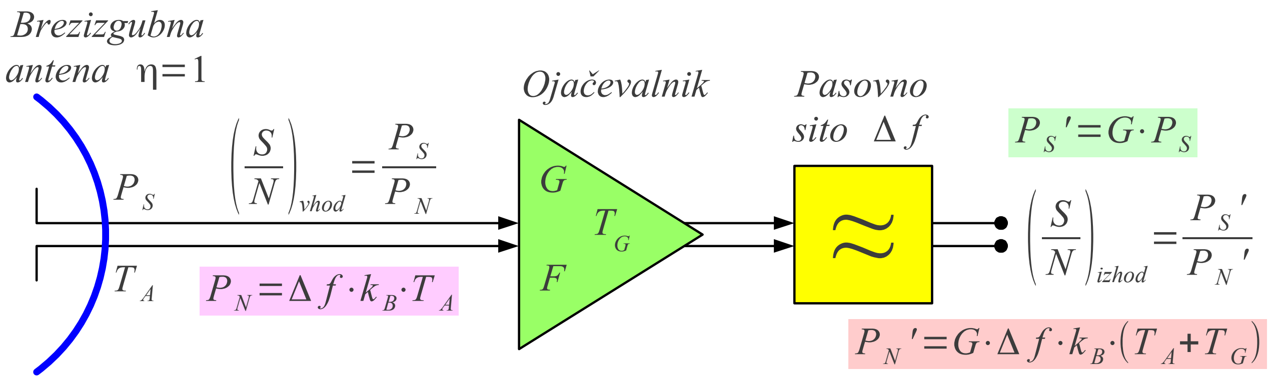
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{izhod} = \frac{P_S}{\Delta f \cdot k_B \cdot (T_A + T_G)}$$

$k_B \approx 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$

$T_0 = 290\mathrm{K} \approx 17\,°\mathrm{C}$

$$10 \log_{10} \frac{k_B T_0}{1\mathrm{mJ}} \approx -174\,\mathrm{dBm/Hz}$$

Razmerje signal/šum sprejemnika



Nesmiselna definicija šumnega števila:

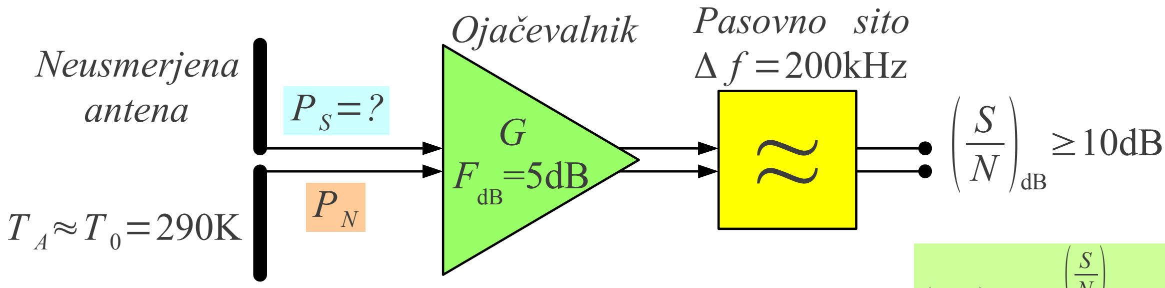
$$F=\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{vhod}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{izhod}}=\frac{\frac{P_S}{\Delta f\, k_B T_A}}{\frac{G P_S}{G\Delta f\, k_B (T_A+T_G)}}=\frac{T_A+T_G}{T_A}=1+\frac{T_G}{T_A}$$

Lastnost ojačevalnika ne more biti funkcija T_A!

Smiselna definicija $$F=1+\frac{T_G}{T_0} \quad @ \quad T_0=290\mathrm{K}\approx 17\,^\circ\mathrm{C} \quad \leftrightarrow \quad T_G=T_0(F-1)$$

Logaritemske enote $$F_{\mathrm{dB}}=10\log_{10}F=10\log_{10}\left(1+\frac{T_G}{T_0}\right) \quad \leftrightarrow \quad T_G=T_0\left(10^{\frac{F_{\mathrm{dB}}}{10}}-1\right)$$

Šumno število ojačevalnika



$$T_G = T_0 \cdot \left(10^{\frac{F_{\mathrm{dB}}}{10}} - 1\right) = 290\mathrm{K} \cdot (3.162 - 1) = 627\mathrm{K}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right) = 10^{\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{dB}}}{10}} \geq 10$$

$$P_N = \Delta f \cdot k_B \cdot (T_A + T_G) = 200\mathrm{kHz} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot (290\mathrm{K} + 627\mathrm{K}) = 2.53 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{W}$$

$$P_S = P_N \cdot \left(\frac{S}{N}\right) = P_N \cdot 10 = 2.53 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{W}$$

$$P_{S\,\mathrm{dBm}} = 10 \log_{10} \frac{P_S}{1\mathrm{mW}} = -106\mathrm{dBm}$$

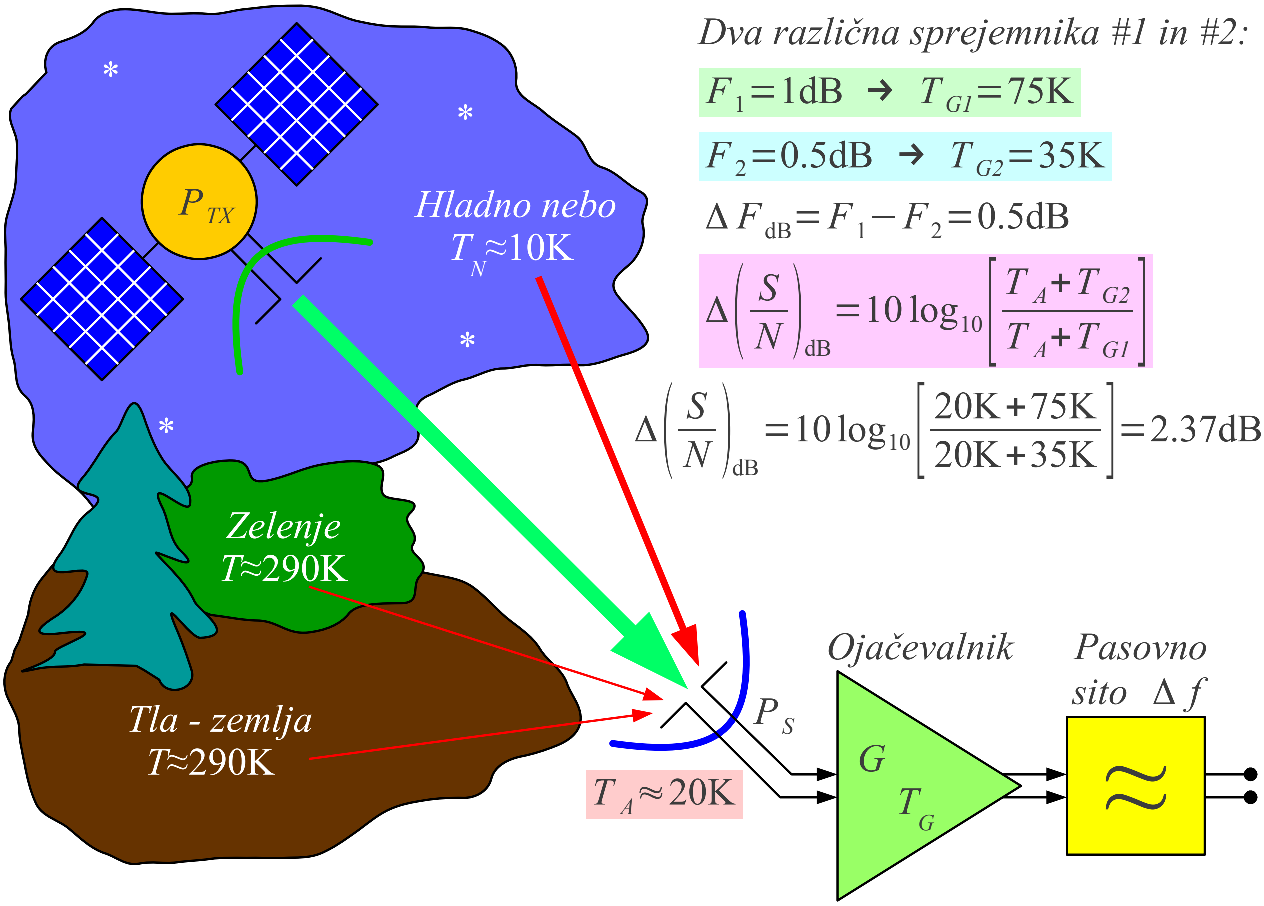
Poenostavljen izračun izključno v primeru $T_A \approx T_0 = 290\mathrm{K}$

$$P_{S\,\mathrm{dBm}} \approx (S/N)_{\mathrm{dB}} + (\Delta f)_{\mathrm{dB \cdot Hz}} + (k_B T_0)_{\mathrm{dBm/Hz}} + F_{\mathrm{dB}}$$

$$(k_B T_0)_{\mathrm{dBm/Hz}} = -174\mathrm{dBm/Hz} \qquad (\Delta f)_{\mathrm{dB \cdot Hz}} = 10 \log_{10}\left(\frac{\Delta f}{1\mathrm{Hz}}\right) = 53\mathrm{dB \cdot Hz}$$

$$P_{S\,\mathrm{dBm}} \approx 10\mathrm{dB} + 53\mathrm{dB \cdot Hz} - 174\mathrm{dBm/Hz} + 5\mathrm{dB} = -106\mathrm{dBm}$$

Občutljivost GSM telefona



Dva različna sprejemnika #1 in #2:

$$F_1 = 1\text{dB} \rightarrow T_{G1} = 75\text{K}$$

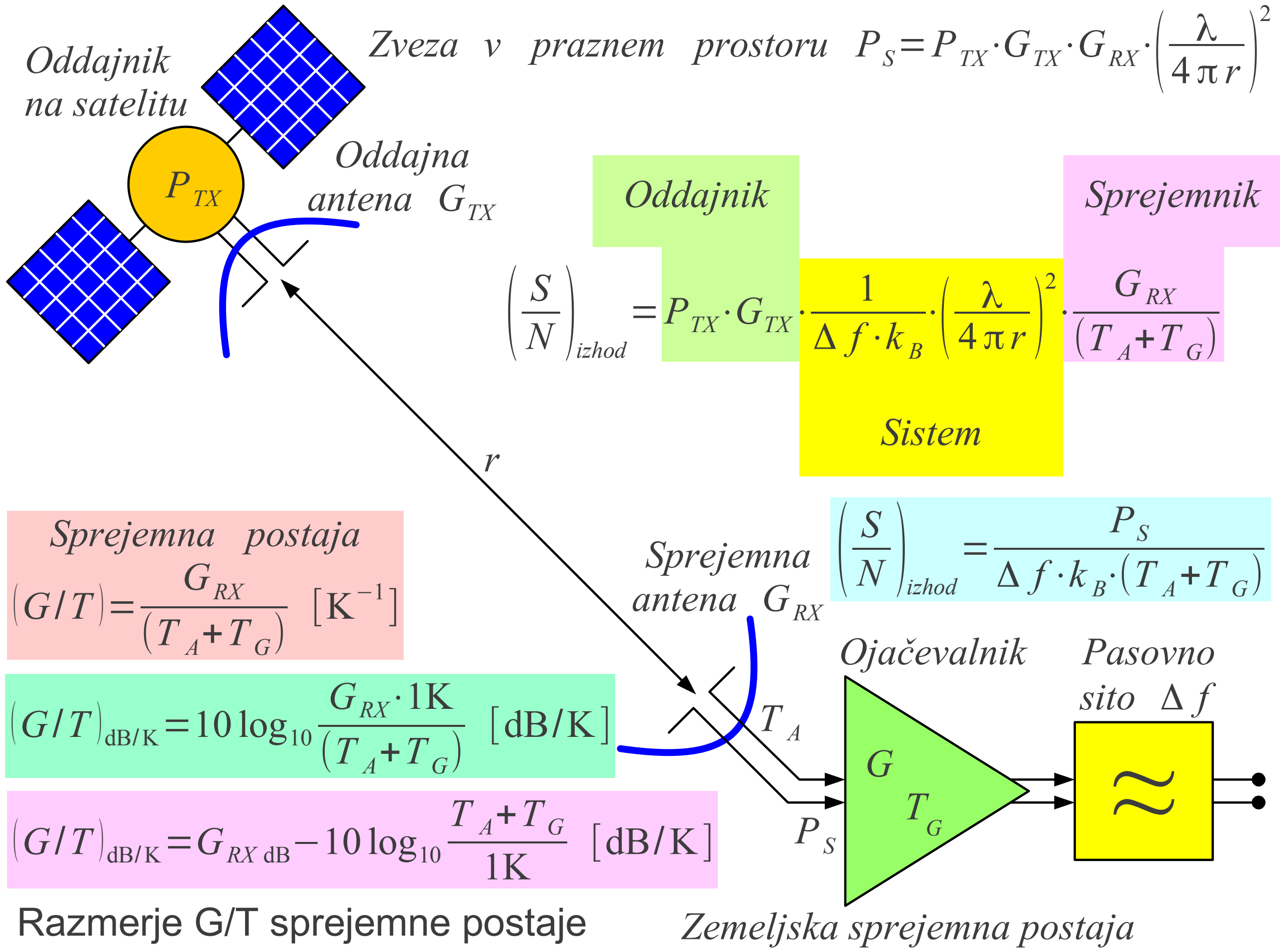
$$F_2 = 0.5\text{dB} \rightarrow T_{G2} = 35\text{K}$$

$$\Delta F_{\text{dB}} = F_1 - F_2 = 0.5\text{dB}$$

$$\Delta\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10\log_{10}\left[\frac{T_A + T_{G2}}{T_A + T_{G1}}\right]$$

$$\Delta\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10\log_{10}\left[\frac{20\text{K} + 75\text{K}}{20\text{K} + 35\text{K}}\right] = 2.37\text{dB}$$

Spremembi F in S/N pri satelitski TV


Oddajnik na satelitu
P_{TX}
Oddajna antena G_{TX}
Zveza v praznem prostoru $P_S=P_{TX}\cdot G_{TX}\cdot G_{RX}\cdot\left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2$
Oddajnik
Sprejemnik
$\left(\frac{S}{N}\right)_{izhod}=P_{TX}\cdot G_{TX}\cdot\frac{1}{\Delta f\cdot k_B}\cdot\left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2\cdot\frac{G_{RX}}{(T_A+T_G)}$
Sistem
r
Sprejemna postaja
$(G/T)=\frac{G_{RX}}{(T_A+T_G)}\quad[\mathrm{K}^{-1}]$
$(G/T)_{\mathrm{dB/K}}=10\log_{10}\frac{G_{RX}\cdot 1\mathrm{K}}{(T_A+T_G)}\quad[\mathrm{dB/K}]$
$(G/T)_{\mathrm{dB/K}}=G_{RX\,\mathrm{dB}}-10\log_{10}\frac{T_A+T_G}{1\mathrm{K}}\quad[\mathrm{dB/K}]$
Razmerje G/T sprejemne postaje
Sprejemna antena G_{RX}
$\left(\frac{S}{N}\right)_{izhod}=\frac{P_S}{\Delta f\cdot k_B\cdot(T_A+T_G)}$
Ojačevalnik
Pasovno sito Δf
T_A
P_S
G
T_G
Zemeljska sprejemna postaja

* * * * *