

Antene in razširjanje valov

Matjaž Vidmar

Ljubljana, 2017

Vsebina

1. Kaj je to radio?	16 strani
2. Krogelne koordinate	8 strani
3. Osnovni viri sevanja	12 strani
4. Radijska zveza v praznem prostoru	0 strani
5. Antenske meritve	
6. Tankožični dipoli	
7. Huygensov izvor	
8. Odprtine	
9. Zbiralna zrcala	
10. Skupine	
11. Polarizacija	
12. Toplotni šum	
13. Razširjanje valov	
14. Ovire	
15. Ozračje	
16. Večpotje	

1. Kaj je to radio?

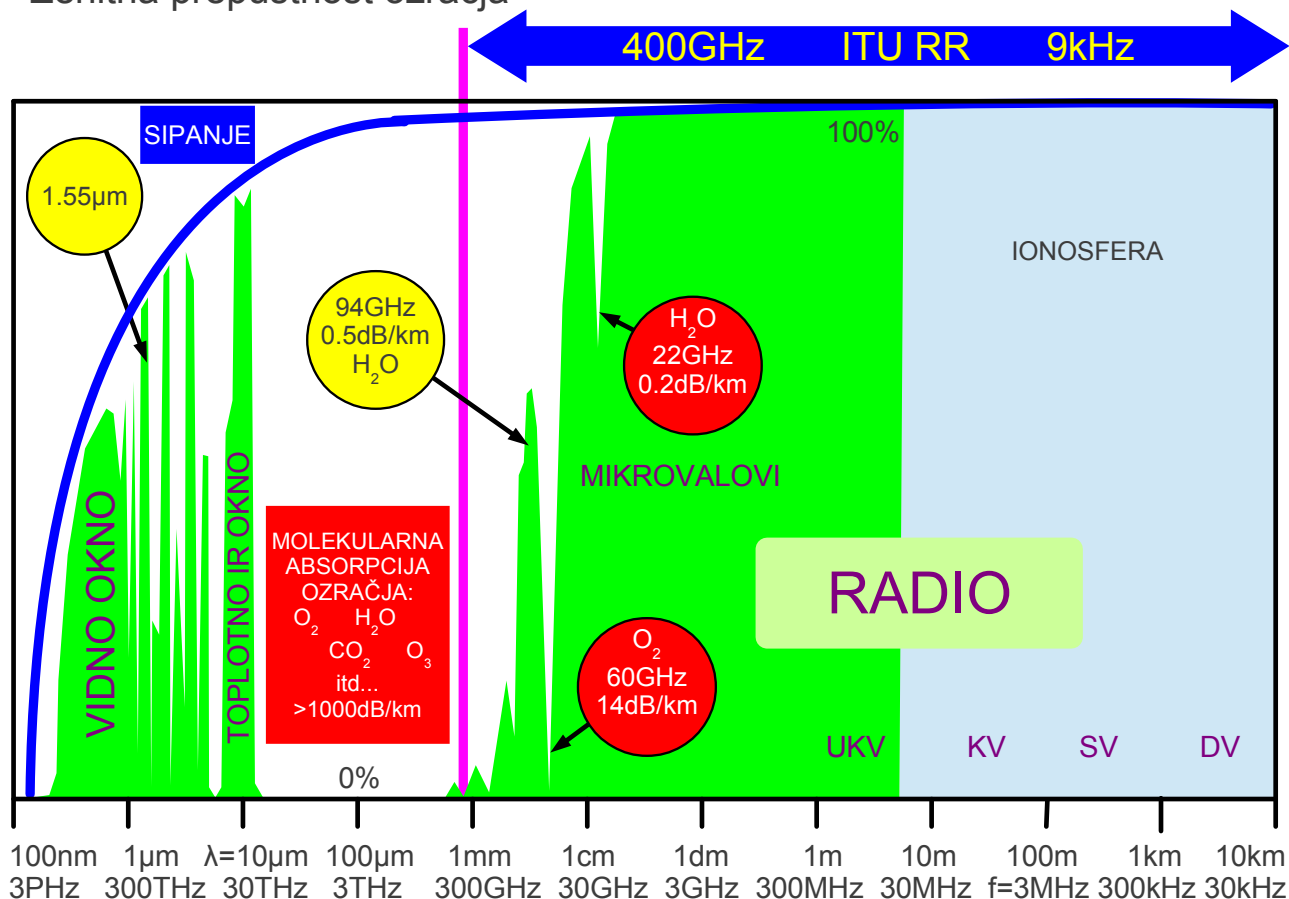
Biologija uči, da višje oblike življenja zmorejo poleg zmogljivejše obdelave podatkov tudi bolj izpopolnjeno daljinsko zaznavanje brez dotika in brezvrvično komunikacijo. Fizika postavlja obema, brezstičnemu daljinskemu zaznavanju in brezvrvični komunikaciji, podobne omejitve. Največji domet obeh omogočajo valovanja: zvočno valovanje v trdnih snoveh, tekočinah in plinih ter elektromagnetno valovanje v povsem praznem prostoru. Različne oblike življenja sicer uporabljajo tudi statične fizikalne pojave za zaznavanje in komunikacijo, a je njihov domet občutno manjši od valovanj.

Za elektromagnetno valovanje je prisotnost snovi kvečjemu ovira. Naravni razvoj oblik življenja je izbral takšno elektromagnetno valovanje, kjer sta ozračje in morska voda razmeroma prozorna, primerna tipala in celo viri valovanja pa biološko izvedljivi: vidna svetloba in bližnja infrardeča svetloba. Nekatere oblike življenja uporabljajo tudi toplotno infrardeče valovanje v ozračju.

Čeprav so dosežki stotine milijonov let trajajočega naravnega razvoja zavidanja vredni, živa bitja uporabljajo le (relativno) ozek del spektra elektromagnetnega valovanja. Nekateri deli spektra elektromagnetnega valovanja so sicer popolnoma neuporabni za zaznavanje in komunikacijo. Nekateri so lahko življenju celo škodljivi, na primer ultravijolična svetloba, rentgenski in gama žarki. Končno, nekatere sicer uporabne dele spektra elektromagnetnega valovanja je naravni razvoj oblik življenja spregledal!

Radio je običajno ime za elektromagnetno valovanje določenih frekvenc oziroma valovnih dolžin, ki ga uporabljamo za brezstično daljinsko zaznavanje in brezvrvično komunikacijo. Radio je plod človeškega duha, ki ga je naravni razvoj oblik življenja spregledal. Mednarodni predpisi, bolj točno ITU Radio Regulations, zahtevajo navajanje frekvenc in ne dovoljujejo uporabe valovnih dolžin. Po ITU Radio Regulations je radio definiran kot elektromagnetno valovanje v frekvenčnem pasu $9\text{kHz} \leq f \leq 400\text{GHz}$:

Zenitna prepustnost ozračja



Naravne omejitve so zagotovo bolj samoumevne od zakonskih predpisov. Na frekvencah nad $f > 400\text{GHz}$ je zemeljsko ozračje skoraj neprozorno za elektromagnetno valovanje. Frekvence pod $f < 100\text{kHz}$ so komaj uporabne za komunikacije oziroma daljinsko zaznavanje zaradi izredno majhne razpoložljive pasovne širine. Hkrati nizke frekvence pomenijo zelo velike valovne dolžine, kjer je težko doseči pravo elektromagnetno sevanje, pač pa naprave izkoriščajo kapacitivni ali induktivni sklop bližnjega jalovega (statičnega) polja, kar ni ravno radio v ožjem pomenu besede.

Kljub temu se področje uporabnih radijskih frekvenc razprostira čez več kot sedem velikostnih razredov oziroma dosti več kot marsikateri drug fizikalni pojav. Končno postavljajo meje tudi praktične omejitve. Na spodnji frekvenčni meji radio potrebuje zelo velike oddajnike in sprejemnike. Na gornji frekvenčni meji se radio obnaša podobno vidni svetlobi: zahteva natančno usmerjanje oddajnikov in sprejemnikov ter postane občutljiv na ovire. Končno, v razponu sedmih velikostnih razredov frekvenc oziroma valovnih dolžin se lastnosti radia zelo spremenijo!

Vse do 19. stoletja fizika ni poznala povezav med navidez različnimi električnimi pojavi, magnetnimi pojavi in svetlobo. V prvi polovici 19. stoletja sta André-Marie Ampère (1826) in Michael Faraday (1831) odkrila povezavi

med električnimi in magnetnimi pojavi v obe smeri. Matematik Carl Freidrich Gauss je zakonitosti dopolnil z električnim pretokom.

V drugi polovici 19. stoletja so fizikalna odkritja uredili matematiki. James Clerk Maxwell (1861) je vse dotedanje znanje o elektriki in magnetiki združil v slovite enačbe, ki danes nosijo njegovo ime, čeprav jih je v danes znani obliki zapisal šele Oliver Heaviside dve desetletji za Maxwellom.

Radio uporabljamo na velikih razdaljah, kjer ne smemo zanemariti relativistike. Maxwellove enačbe zato zapišemo v obliki diferencialnih enačb, ki vsebujejo diferencialne operacije odvajanja v prostoru: vrtinčenje vektorskega polja $\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$ in izvornost vektorskega polja $\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$. Reševanje enačb lahko zahteva še smerni odvod skalarnega polja $\text{grad } V = \nabla V$.

Radio običajno deluje z razmeroma ozkopasovnimi signali $B \ll f$, ki jih v izračunih lahko ponazorimo s harmonskim signalom ene same krožne frekvence $\omega = 2\pi f$. To dodatno poenostavi enačbe z zamenjavo časovnih odvodov $\partial/\partial t = j\omega$:

Elektromagnetika

Harmonske veličine:

$$\partial/\partial t = j\omega$$

$\omega \equiv$ krožna frekvenca [rd/s]

$$\vec{H} \equiv \text{magnetna poljska jakost} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$$

$$\vec{J} \equiv \text{gostota toka} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\text{Ampère: } \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + j\omega \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{E} \equiv \text{električna poljska jakost} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

$$\text{Faraday: } \text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H}$$

$$\rho \equiv \text{gostota elektrine} \left[\frac{\text{As}}{\text{m}^3} \right]$$

$$\text{Gauss: } \text{div } \epsilon \vec{E} = \rho$$

$$\epsilon \equiv \text{dielektričnost} \left[\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \right] \rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\mu \equiv \text{permeabilnost} \left[\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \right] \rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\text{Poynting: } \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \equiv \text{gostota pretoka moči} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \equiv \text{vektorski potencial} \left[\frac{\text{Vs}}{\text{m}} \right]$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \equiv \text{skalarni potencial} [\text{V}] \quad \vec{E} = -j\omega \vec{A} - \text{grad } V$$

Radio večinoma uporabljamo v zemeljskem ozračju na frekvencah, kjer se zemeljsko ozračje obnaša skoraj kot prazen prostor $\epsilon \approx \epsilon_0$ in $\mu \approx \mu_0$. Ker sta dielektričnost in permeabilnost preprosti skalarni konstanti, gostote električnega pretoka $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ in gostote magnetnega pretoka $\vec{B} = \mu \vec{H}$ pri radiu v enačbah posebej ne navajamo, saj sta preprosto izračunljivi.

Maxwellov učenec John Henry Poynting je leta 1884 opisal pretok elektromagnetne moči. Pripadajoči vektor gostote moči $\vec{S} = 1/2 \vec{E} \times \vec{H}^*$ vsebuje za vršne vrednosti harmonskih veličin v enačbi polovico in konjugirano-kompleksno vrednost magnetne poljske jakosti povsem enakovredno kompleksni električni moči $P = 1/2 U I^*$!

Hkrati z osnovnimi enačbami elektromagnetnega polja so bila razvita tudi računska orodja. Čeprav je skalarni potencial in vektorski potencial vpeljal že Maxwell, šele premišljena izbira izvornosti vektorskega potenciala $\text{div } \vec{A} = -j\omega\mu \epsilon V$ (Ludvig Lorenz 1888) omogoča uporaben zapis enačb za izračun zakasnenih potencialov (angleško: retarded potentials).

Skalarni potencial $V(\vec{r})$ in vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ omogočata izračun električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$ in magnetnega polja $\vec{H}(\vec{r})$ v točki \vec{r} iz znanih virov, elektrin $\rho(\vec{r}')$ in tokov $\vec{J}(\vec{r}')$ na koordinatah \vec{r}' . Zakasnitev od vira do točke opazovanja opisuje zasuk faze $\phi = -k|\vec{r} - \vec{r}'|$.

Končno so Maxwellove enačbe napovedale tudi elektromagnetno valovanje oziroma povezavo med električnimi in magnetnimi pojavi ter svetlobo, kar je Heinrich Rudolf Hertz potrdil z različnimi poskusi v obdobju 1886-1889. S tehniko 19. stoletja so mehanski stroji lahko kvečjemu naredili silno počasno elektromagnetno valovanje z valovno dolžino nekaj tisoč kilometrov, daleč preveč za kakršenkoli laboratorijski poskus. Prve žarnice so sicer proizvajale vidno svetlobo z valovno dolžino manj kot mikrometer, ampak povezava med električnimi in svetlobnimi pojavi v žarnici ni samoumevna.

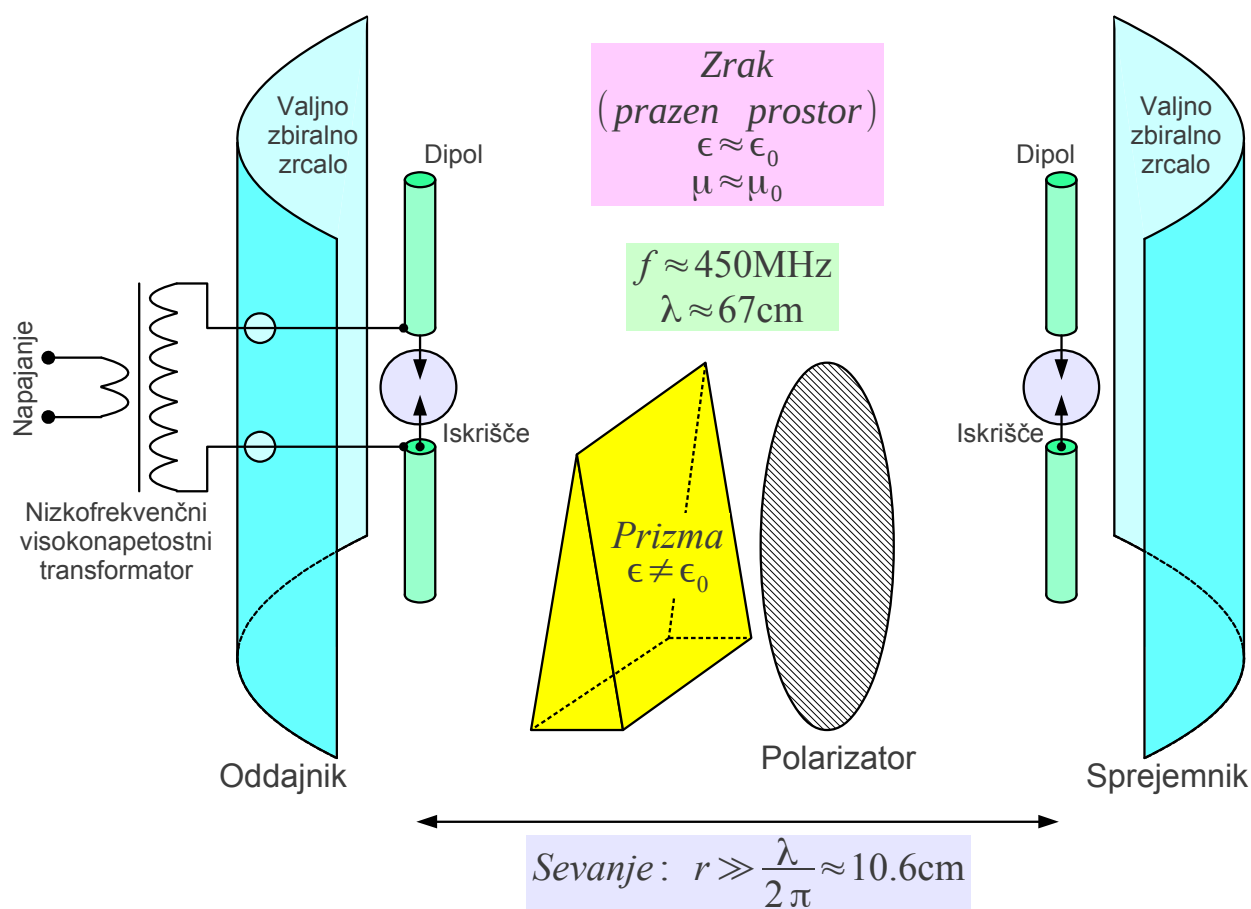
Heinrich Rudolf Hertz je bil za svoj čas izredno inovativen, da je našel pot okoli opisane navidez nepremostljive ovire. Izdelal je več različnih električnih rezonatorjev (nihajnih krogov) za frekvence v pasu

$50\text{MHz} < f < 500\text{MHz}$. Kapacitivnost rezonatorja je najprej naelektril z nizkofrekvenčnim visokonapetostnim virom in nato pognal nihanje rezonatorja z električno iskro, ki nastane ob preboju. Iskra se pri tem obnaša kot izredno hitro stikalo, ki požene nihanje na več kot šest velikostnih razredov višji frekvenci.

Izkoristek takšne pretvorbe nizkofrekvenčne energije v

visokofrekvenčno energijo je sicer slab. Ustvarjeno visokofrekvenčno nihanje je močno dušeno, torej kratkotrajno. Hertz je uporabil iskrišče tudi kot visokofrekvenčni detektor v rezonatorju (dipolu) sprejemnika. Domet svoje naprave je močno izboljšal z valjnima zbiralnima zrcaloma velikosti $2\text{m} \times 1.2\text{m}$ v oddajniku in sprejemniku ter tako pokazal odboj in razširjanje elektromagnetnega valovanja frekvence okoli $f \approx 450\text{MHz}$.

Hertzovi poskusi so vsebovali pomembno podrobnost, ki je večina ni opazila. Hertz je kot prvi opazil elektromagnetno sevanje na dovolj velikih razdaljah $r \gg \lambda/2\pi$, ki se obnaša drugače od kapacitivnega oziroma induktivnega sklopa na nižjih frekvencah oziroma manjših razdaljah:



Hertzov poskus

Z obračanjem sprejemnika in oddajnika ter vstavljanjem različnih ovir (prizma iz dielektrika, polarizator iz vzporednih kovinskih žic) v radijsko pot je Hertz pokazal še polarizacijo in lom elektromagnetnega valovanja. Vsi Hertzovi poskusi so se natančno ujemali z Maxwellovo teorijo na eni strani ter z znanimi svetlobnimi pojavi na drugi strani. Povezava med svetlobo in električnimi pojavi ni bila več samo teorija, pač pa potrjena z laboratorijskim poskusom!

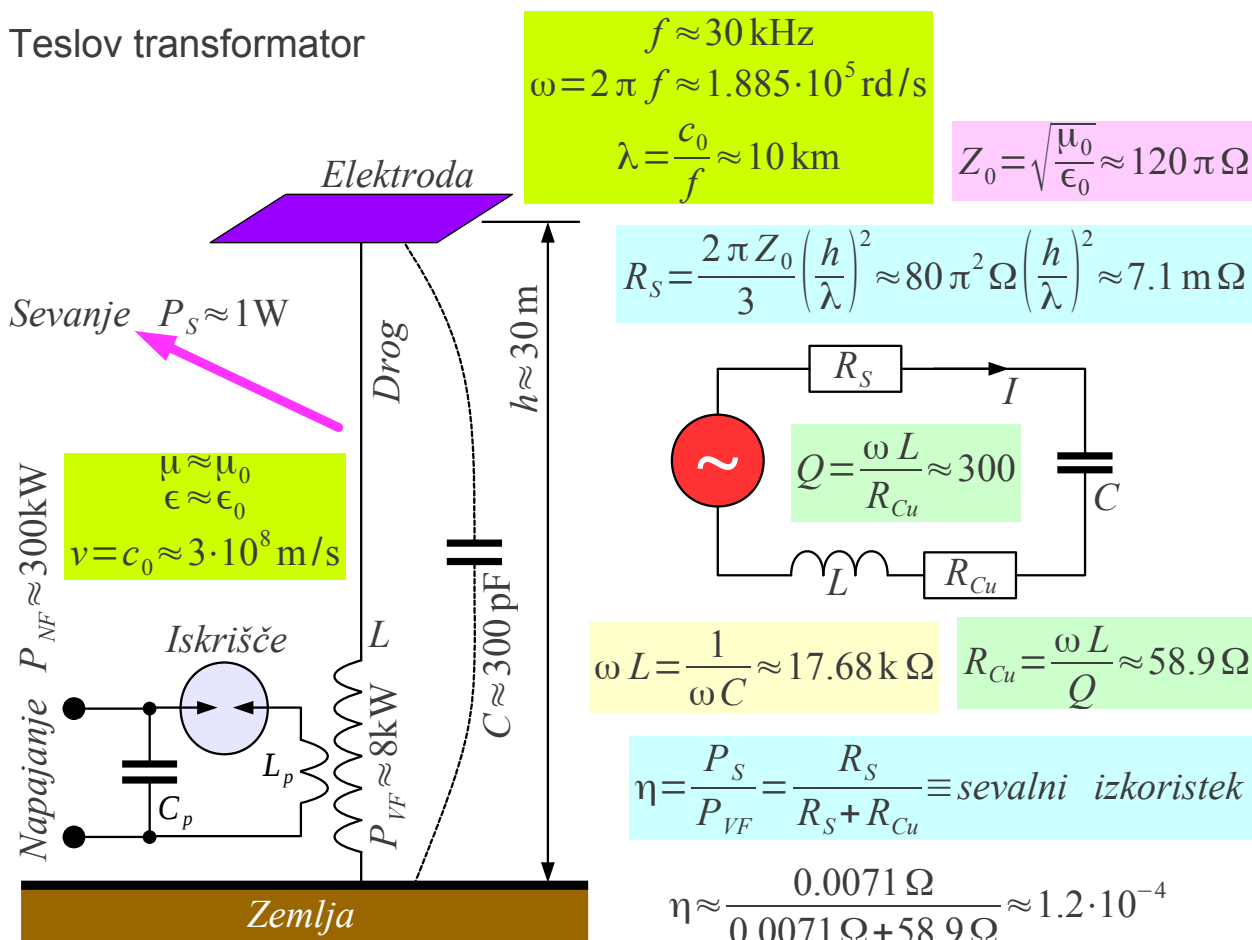
Heinrich Rudolf Hertz je umrl razmeroma mlad. Na prelomu stoletja so

se številni izumitelji širom sveta lotili najrazličnejših poskusov s tako imenovanimi "Hertzovimi valovi", čeprav pogosto ni šlo za elektromagnetno valovanje v strogem pomenu besede. Izvirni Hertzovi poskusi so delovali na frekvencah vse do približno $f \approx 450 \text{ MHz}$. Večina takratnih izumiteljev, tudi Nikola Tesla in Guglielmo Marconi, pa je v svojih poskusih uporabljala dosti nižje frekvence večinoma pod $f < 100 \text{ kHz}$.

Nikola Tesla, Guglielmo Marconi in številni drugi izumitelji so v svojih poskusih uporabljali električno majhne naprave $h \ll \lambda$ v primerjavi z valovno dolžino. V takšnih napravah ima elektromagnetno polje hkrati statične komponente, sevanje in še druge dinamične člene podobnih velikostnih razredov. Izumitelji večinoma niso imeli niti teoretskega znanja niti primernih merilnih inštrumentov, s katerimi bi lahko ločili med različnimi členi električnega in magnetnega polja električno majhne naprave.

Praktične izvedbe kratkih električnih dipolov so Teslovi transformatorji 1891-1900. Čeprav natančni podatki niso znani, iz razpoložljivih virov sklepamo, da je Nikola Tesla izdelal naprave vse do višine $h \approx 30 \text{ m}$, ki so proizvajale izredno visoke napetosti na frekvencah pod $f \leq 30 \text{ kHz}$:

Teslov transformator



Nikola Tesla je svoje naprave najverjetneje načrtoval za čim večje

bližnje električno polje in čim močnejši statični električni (kapacitivni) sklop do sprejemnika. Sevanja niti sevalne upornosti verjetno ni nikoli opazil. Tesla je večino poskusov opravil na majhnih razdaljah $r \ll \lambda/2\pi$. Sevalna upornost njegovih naprav je bila za štiri velikostne razrede nižja $R_s \ll R_{Cu}$ od upornosti navitja njegovega transformatorja. Tesla sevalne upornosti ni mogel opaziti, kaj šele izmeriti. Iz razpoložljivih podatkov sklepamo, da Tesla ni poznal razlike med bližnjim električnim poljem in sevanjem.

Daljinsko vodena ladjica Nikole Tesle iz leta 1898 je sicer predstavljala izum daleč pred svojim časom, ki pa je bil podobno kot ostali Teslovi poskusi zelo omejen z dometom. Nikola Tesla je sicer že uporabljal občutljivejši visokofrekvenčni sprejemnik: koherer. Koherer, ki ga je izumil Édouard Branly leta 1890, izkorišča preboj oksidirane površine med zrnici kovine, kar se zgodi pri več kot desetkrat nižji napetosti od preboja iskrišča v zraku $U \geq 100V$.

Še občutljivejši detektor je izdelal indijski znanstvenik Jagdish Chandra Bose s kristalom svinčevega galenita PbS leta 1894 in z njim uspešno zaznal frekvence, ki jih danes imenujemo mikrovalovi. Tehnika na koncu 19. stoletja sicer ni bila naklonjena mikrovalovom in Bosejev polprevodniški detektor je moral počakati še pol stoletja do uporabe v radarju v drugi svetovni vojni. Nizozemec Christian Hülsmeier je leta 1906 sicer uspešno zaznal ladjo skozi gosto meglo s pomočjo kohererja, kar velja za prvi uspešen poskus radarja.

Od vseh izumiteljev na prelomu iz 19. v 20. stoletje je bil poslovno daleč najuspešnejši italijanski inženir Guglielmo Marconi. Marconi je že od začetka izbral pravi cilj, vzpostaviti radijsko zvezo (komunikacijo) na čim večji razdalji. Brezžični prenos energije niti drugi fizikalni pojavi (iskre v velikem električnem polju) Marconija niso zanimali. Podobno kot drugi izumitelji tistega časa (Tesla) je tudi Marconi iskal svoj cilj z vztrajnim poizkušanjem brez globljega teoretskega predznanja. Povrhu je Marconi uspel združiti najboljše dosežke številnih drugih izumiteljev (tudi Tesle) v delujočo in praktično uporabno napravo.

Vztrajni poskusi s pravim ciljem so se obrestovali. Kmalu po prelomu stoletja je Guglielmo Marconi uspel vzpostaviti prvo prekooceansko radijsko zvezo. Pri tem je z manjšimi in cenejšimi napravami prehitel tudi ogromni, dragi, nikoli dokončani in neuspešni veliki oddajnik Nikole Tesle, stolp Wardencliff višine kar $h=57m$. Guglielmo Marconi in Karl Ferdinand Braun sta za svoje dosežke na področju radia prejela leta 1909 Nobelovo nagrado iz fizike. V tedanji javnosti je sicer bolj odmevala vloga Marconijevih naprav v brodolomu ladje Titanic leta 1912, kjer je izgubil življenje tudi tesni Marconijev sodelavec.

Guglielmo Marconi je utemeljil tudi elektrotehnični izraz "antena".

Antena je ime za napravo, ki pretvarja vodeno elektromagnetno valovanje v sevanje ali obratno. Marconi je novo napravo poimenoval iz podobnosti s tipalkami žuželk in drugih živali, ki se v latinščini imenujejo antene. Za razliko od Nikole Tesle, ki v svojih napravah ni videl sevanja, pač pa le statično polje kondenzatorja in je napravo poimenoval elektroda oziroma priključek (terminal).

Istočasno z Marconijevimi uspehi se je menjalo tudi ime valovanja in pripadajočih naprav. Izraz Hertzovi valovi je okoli leta 1910 zamenjal izraz radijski valovi. Pripadajoče naprave so dobile novo ime radio. Radijsko zvezo so poimenovali tudi brezvrvična zveza (wireless).

Nadaljnji razvoj radia je zaznamoval razvoj elektronike. Leta 1904 je John Ambrose Fleming razvil vakuumsko diodo, ki je občutljiv in zanesljiv detektor radijskih signalov. Lee De Forest je leta 1906 izumil vakuumsko triodo, prvi elektronski ojačevalnik. Američan Edwin Howard Armstrong in Avstrijec Alexander Meissner sta leta 1912 skoraj istočasno izdelala prve elektronske oscilatorje s triodo, ki se jih da uporabiti kot učinkovit radijski oddajnik oziroma kot izredno občutljiv regenerativni sprejemnik.

V obdobju druge svetovne vojne se je radijska tehnika tako razvila, da je poleg brezvrvične komunikacije omogočala tudi daljinsko zaznavanje, radiolokacijo in radijsko navigacijo. Vse velesile druge svetovne vojne: Velika Britanija, ZDA, Nemčija, Sovjetska Zveza, Japonska, Nizozemska, Francija, Italija so poznale bolj ali manj uspešen radar.

Po koncu druge svetovne vojne je radio izgledal najprimernejše sredstvo za komunikacijo velike zmogljivosti na velike razdalje, še posebno z izstrelitvijo prvega umetnega Zemljinega satelita in začetkom vesoljske tekme leta 1957. Radio je dobil pomembnega tekmeca pri visokih zmogljivostih na srednjih razdaljah šele leta 1970 z izdelavo uporabnega svetlobnega vlakna v tovarni Corning. Končno predstavlja pomemben mejnik še prvo radijsko paketno omrežje ALOHAnet Univerze Hawaii leta 1971.

Danes (2017) je svetlobno vlakno izpodrinilo radio na srednjih razdaljah pri najvišjih zmogljivostih. Eno samo svetlobno vlakno omogoča zvezo večje zmogljivosti od vsote zmogljivosti vseh do danes izstreljenih telekomunikacijskih umetnih satelitov. Radio ostaja nenadomestljiv pri največjih razdaljah v vesolju. Hkrati radio pridobiva na pomenu neodvisno od razdalje povsod tam, kjer je kakršnakoli vrvica nezaželjena oziroma neuporabna.

Poštena primerjava razvoja radia upošteva teorijo informacije, ki jo je razvil Claude Shannon leta 1948. Poleg zmogljivosti zveze $C [\text{bit/s} = \text{bps}]$

je pomembna tudi spektralna učinkovitost $C/B [\text{bit/s/Hz} = \text{bit}]$, saj je radiofrekvenčni spekter omejena naravna dobrina:

Zmogljivost radijske zveze

$$\text{Informacija} \quad I = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{W_S}{W_N} \right) \quad [\text{bit}] \quad (\text{Claude Shannon 1948})$$

$W_S \equiv \text{energija signala}$

$W_N \equiv \text{energija šuma}$

$T \equiv \text{perioda signala}$

$$\text{Pasovna širina} \quad B = \frac{1}{2T} \quad [\text{Hz}] \quad (\text{Harry Nyquist 1924})$$

$P_S \equiv \text{moč signala}$

$P_N \equiv \text{moč šuma}$

$N_0 \equiv \text{spektralna gostota šuma}$

$$\text{Zmogljivost} \quad C = m \cdot B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right) = m \cdot B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{B \cdot N_0} \right) \quad [\text{bit/s} = \text{bps}]$$

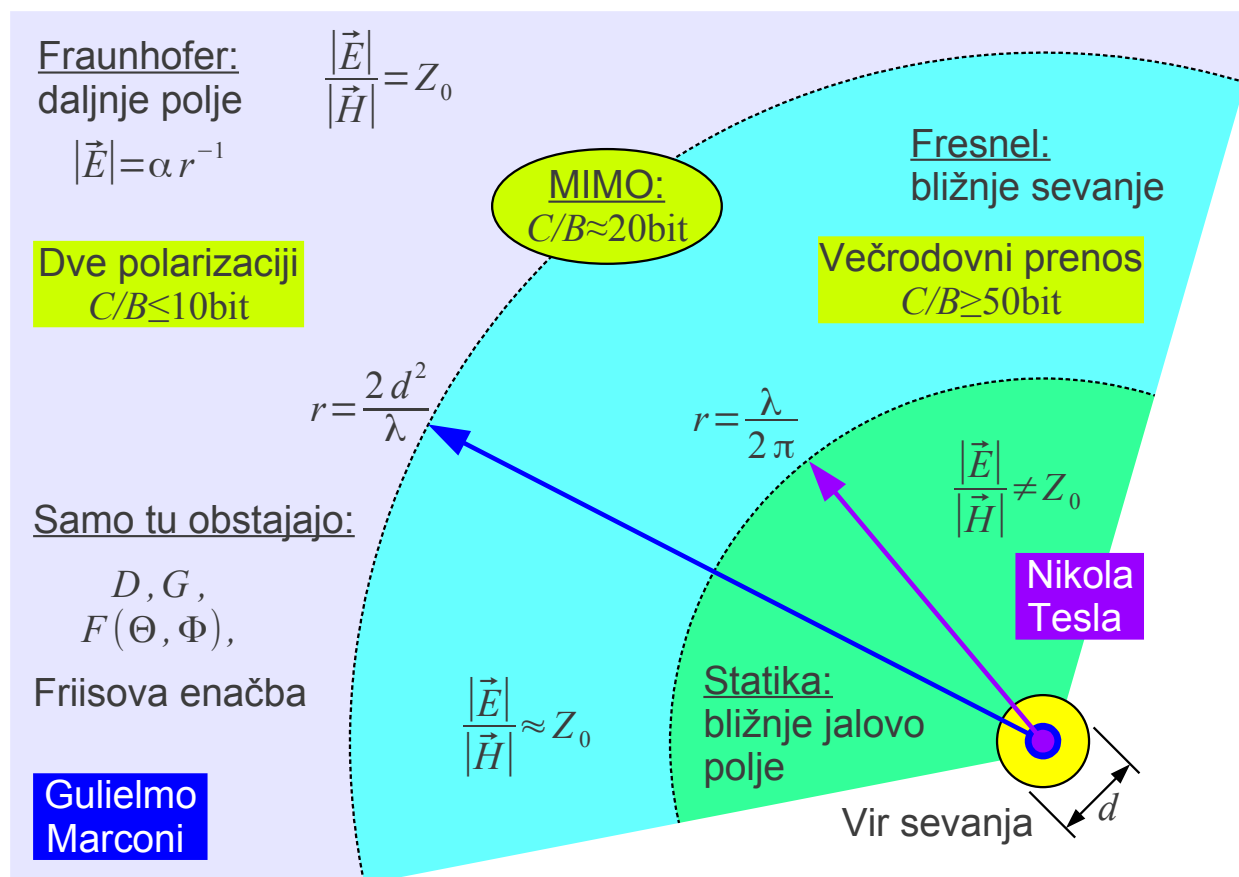
$m \equiv \text{število rodov}$

$$\text{Spektralna učinkovitost} \quad C/B = m \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{B \cdot N_0} \right) \quad [\text{bit/s/Hz} = \text{bit}]$$

Leto	Vrsta radijske zveze	Pasovna širina B	Zmogljivost C	Spektralna učinkovitost C/B
~1910	Telegrafija s sprejemom na sluh	500Hz	10bit/s	0.02bit/s/Hz
~1950	Radioteleprinter	250Hz	50bit/s	0.2bit/s/Hz
~1990	GSM telefon	200kHz	271kbit/s	1.355bit/s/Hz
~2010	WiFi 802.11n ($m=2$)	40MHz	300Mbit/s	7.5bit/s/Hz

Brezstično daljinsko zaznavanje oziroma brezvrvično komunikacijo s pomočjo elektromagnetnih pojavov lahko razdelimo po načinu delovanja v tri velike skupine:

- (1) bližnje jalovo (statično) polje (angleško: near-field region, reactive),
- (2) Fresnelovo področje oziroma bližnje sevanje (angleško: near-field region, radiating) in
- (3) Fraunhoferjevo področje oziroma daljnje polje (angleško: far-field region):



Statika, Fresnel in Fraunhofer

Bližnje jalovo polje prevladuje na razdaljah $r \ll \lambda/2\pi$, ki so dosti manjše od valovne dolžine. V bližnjem jalovem polju sta električno polje \vec{E} in magnetno polje \vec{H} dve neodvisni veličini. Elektromagnetno sevanje je v bližnjem polju zanemarljivo majhno $|\vec{E}_{\text{sevani}}| \ll |\vec{E}_{\text{statični}}|$ in $|\vec{H}_{\text{sevani}}| \ll |\vec{H}_{\text{statični}}|$ v primerjavi s statičnim elektromagnetnim poljem. Bližnje jalovo polje zelo hitro upada s tretjo potenco razdalje $|\vec{E}_{\text{statični}}| = \alpha r^{-3}$ oziroma $|\vec{H}_{\text{statični}}| = \alpha r^{-3}$.

Zvezo v bližnjem polju popolnoma opiše kapacitivni oziroma induktivni sklopom med oddajnikom in sprejemnikom. Na majhnih razdaljah $r \ll \lambda/2\pi$ je kakršenkoli fazni zasuk $\Delta\phi = 2\pi r/\lambda \ll 1 \text{ rd}$ izredno majhen, zato ne moremo govoriti o valovanju. Pravilnejši izraz je nihanje. Ker sta bližnje električno in magnetno polje v kvadraturi, ima bližnje polje skoraj popolnoma jalov Poyntingov vektor $\text{Re}[\vec{S}] \rightarrow 0$. Brez prenosa delovne moči prav tako ne moremo govoriti o valovanju.

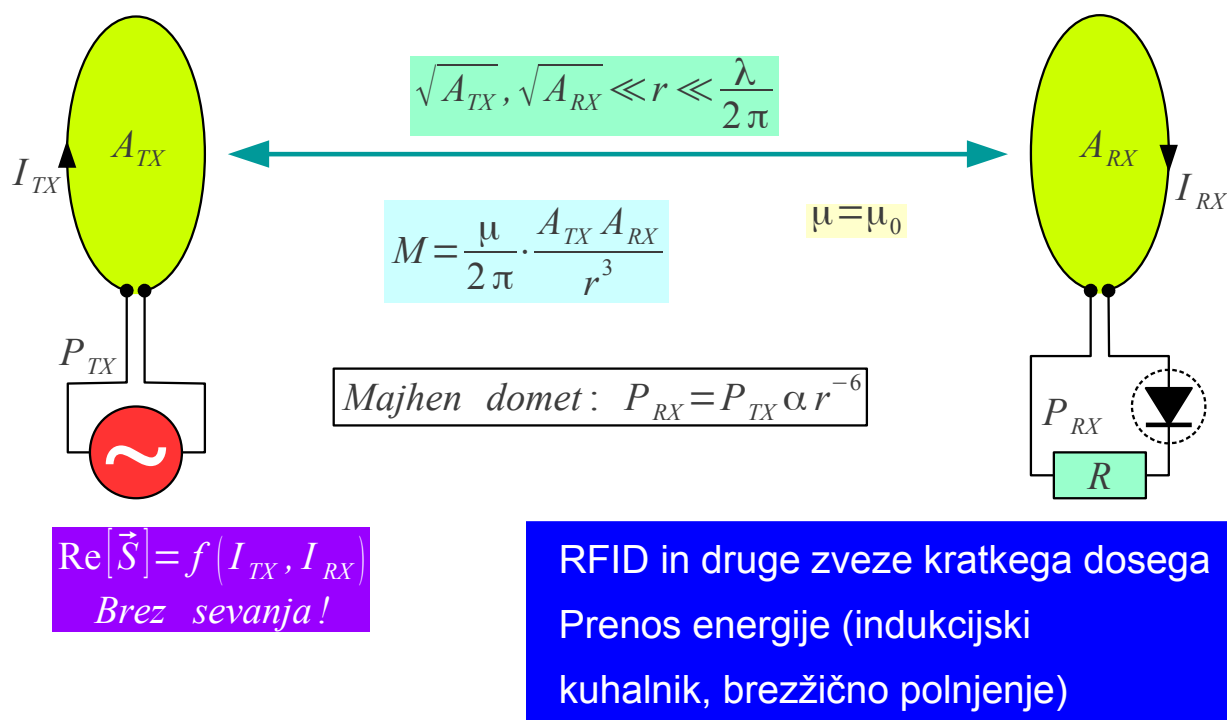
Nikola Tesla je v svojih poskusih večinoma uporabljal kapacitivni sklop v praznem prostoru med oddajnikom in sprejemnikom. Sodobne naprave, RFID in druge zveze kratkega dosega, uporabljajo v bližnjem polju večinoma

induktivni sklop. S stališča teorije sta kapacitivni in induktivni sklop sicer dva različna pojava, ki pa imata enako omejitev. Na velikih razdaljah

$r \gg \sqrt{A_{TX}}, \sqrt{A_{RX}}$ sprejeta moč upada s šesto potenco razdalje

$P_{RX} = P_{TX} \propto r^{-6}$, zato je domet takšnih naprav majhen:

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} \neq Z_0 \rightarrow \text{Potrebna ločena meritev } \vec{E} \text{ ter } \vec{H}$$



Induktivni sklop v bližnjem polju

Ker je Poyntingov vektor samega oddajnika skoraj popolnoma jalov $\text{Re}[\vec{S}] \rightarrow 0$, oddajnik skoraj nič ne seva. Delovna komponenta

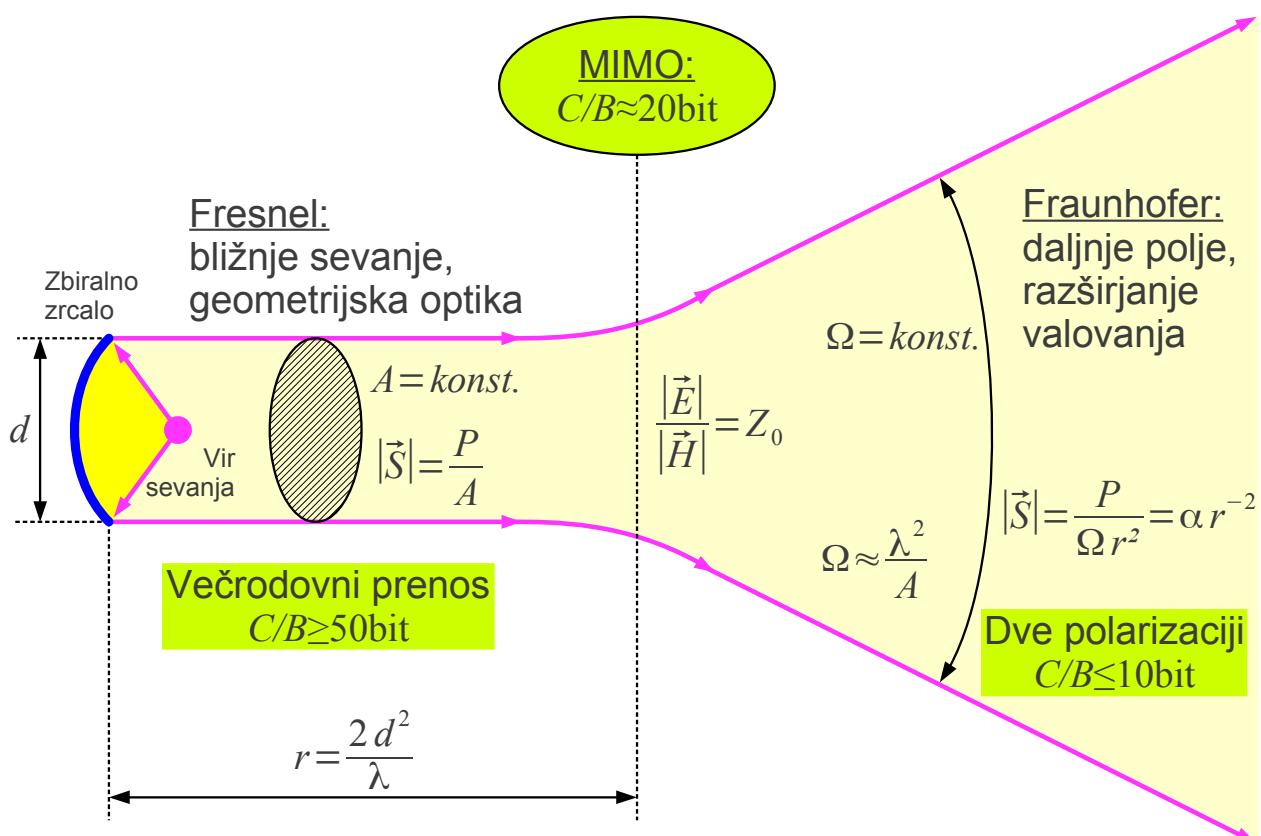
Poyntingovega vektorja $\text{Re}[\vec{S}] \neq 0$ se pojavi šele takrat, ko sta tokova prisotna v obeh, I_{TX} v oddajniku in I_{RX} v sprejemniku in sta med sabo v kvadraturi! Ker se pri induktivnem oziroma kapacitivnem sklopu nič moči ne izgublja v prostor, je takšen prenos energije lahko zelo učinkovit, na primer v indukcijskem kuhalniku oziroma v brezžičnem polnilcu.

Pravo elektromagnetno valovanje je vedno prečno (transverzalno) valovanje, torej imata v krogelnih koordinatah sevano električno polje \vec{E}_{sevani} in sevano magnetno polje \vec{H}_{sevani} samo prečni komponenti $\vec{1}_{\Theta}$ in $\vec{1}_{\Phi}$, ko se nahaja vir v koordinatnem izhodišču. Statično polje $\vec{E}_{\text{statični}}$ oziroma $\vec{H}_{\text{statični}}$ lahko ima tudi vzdolžno komponento $\vec{1}_r$ v krogelnih koordinatah, vendar to ni valovanje. Zabloda o vzdolžnem (longitudinalnem)

elektromagnetnem valovanju je živa še danes kljub temu, da ga fizikalni zakoni niti Maxwellove enačbe ne dopuščajo. Vz dolžno valovanje bi zahtevalo $\text{div } \vec{E} \neq 0$ oziroma $\text{div } \vec{H} \neq 0$ v praznem prostoru brez elektrin oziroma magnetnih nabojev. Vz dolžnega elektromagnetnega valovanja ni do danes še nihče zares izmeril!

Na večjih razdaljah $r \gg \lambda/2\pi$ postaneta električno in magnetno polje v praznem prostoru med sabo pravokotna, sofazna in njuno razmerje se približuje točni vrednosti $|\vec{E}|/|\vec{H}| \rightarrow Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$. Poyntingov vektor postane realen $\text{Im}[\vec{S}] \rightarrow 0$ in predstavlja delovno moč P , ki se iz oddajnika širi v neskončnost v isti smeri, kamor valovanje potuje.

Elektromagnetno sevanje antene običajno dodatno razdelimo na dve področji: Fresnelovo področje in Fraunhoferjevo področje. V obeh področjih bližnje jalovo (statično) polje izgine. Razliko med Fresnelovim in Fraunhoferjevim področjem najlažje opišemo z zgledom zrcalne antene:



Rayleighjeva razdalja

Vir sevanja postavimo v gorišče zbiralnega zrcala. Takoj po odboju valovanja od zrcala so žarki vzporedni. Valovanje najprej potuje po snopu konstantnega preseka $A = \text{konst.}$. Na določeni razdalji se začne snop širiti.

Na velikih razdaljah se valovanje širi naprej v stožcu s konstantnim prostorskim kotom $\Omega = konst.$, ki je funkcija valovne dolžine in začetnega preseka snopa $\Omega \approx \lambda^2 / A$.

Mejo med geometrijsko (žarkovno) optiko in razširjanjem valovanja je postavil Lord Rayleigh leta 1891. Ker je prehod med obema področjema zvezen in zelo blag, je izbira meje odvisna od dopustne napake. Pri radijskih antenah običajno uporabljamo zelo strogo mejo za napako faze $\Delta \phi < \pi/8$, kar določa Rayleighjevo razdaljo $r = 2d^2/\lambda$.

Radijske antene običajno uporabljamo v Fraunhoferjevem področju daljnega polja $r > 2d^2/\lambda$. V Fraunhoferjevem področju se valovanje razširja v konstanten prostorski kot $\Omega = konst.$. Gostota pretoka moči upada s kvadratom razdalje $|\vec{S}| = \alpha r^{-2}$.

Običajne definicije smerne diagrama antene $F(\Theta, \Phi)$, smernosti antene D in dobitka antene G so smiselne samo v daljnem polju. Samo v daljnem polju velja Friisova enačba za izračun slabljenja radijske zveze. V daljnem polju lahko z anteno vzbudimo samo dva neodvisna rodova $m = 2$, dve med sabo pravokotni polarizaciji prečnega elektromagnetnega valovanja.

Fresnelovo področje $r < 2d^2/\lambda$ si najlažje predstavljamo z geometrijsko (žarkovno) optiko. V Fresnelovem področju lahko z enima ali več zrcali prenašamo sliko, sestavljeno iz mnogih neodvisnih slikovnih točk (pikslov). Vsaka neodvisna slikovna točka podpira še dve neodvisni, med sabo pravokotni polarizaciji.

V Fresnelovem področju je torej možen prenos množice med sabo neodvisnih rodov $m \gg 2$, ki prenašajo neodvisne informacije. Spektralna učinkovitost večrodovnega prenosa C/B je lahko izredno visoka. Ker se v Fresnelovem področju snop valovanja še ne razširja, lahko sprejemnik ujame večino moči oddajnika P .

Od vseh opisanih brezvrvičnih zvez je Fresnelovo področje najtežje izvedljivo. Uporaben domet dosežemo z velikimi antenami pri visokih frekvencah (majhen $\lambda = c_0/f$). Sodobna tehnika (2017) komaj dosega mejni primer $r \approx 2d^2/\lambda$, kjer tehnika MIMO (Multiple-In-Multiple-Out) omogoča nekoliko boljšo spektralno učinkovitost C/B glede na zvezo v daljnem polju.

Ta učbenik skuša odgovoriti na izziv, kako poučevati radijske antene in

razširjanje radijskih valov na sodoben način. Od vseh vrst elektromagnetnih brezvrvičnih zvez danes ostajajo najpomembnejše radijske zveze v daljnem polju oziroma v Fraunhoferjevem področju. Na slednje so vezane številne definicije, ki jih moramo vzeti z razumevanjem, ko zaidemo v Fresnelovo področje ali celo v bližnje jalovo polje.

Antene in razširjanje valov zahtevajo dobro poznavanje osnov elektrotehnike in elektrodinamike. Jasne fizikalne slike nikakor ne more nadomestiti še tako dolgovezna in obremenjujoča matematična izpeljava. Računalniška simulacija je najslabša rešitev, ker ne uči teorije fizikalnega ozadja niti rezultatov ne preverja z meritvami.

Pri antenah in razširjanju valov postavlja fizika zahteve, ki pogosto niso skladne s smernicami sodobnega virtualnega sveta. Še najbolj samoumevna je primerjava radia z letalstvom. Letalo zahteva krila določenih izmer, da lahko preleti določeno pot. Radijska zveza zahteva antene določenih izmer, da lahko premosti določeno razdaljo.

Strogi zakoni fizike dopuščajo malo svobode. Višje od skromnih $h > 12\text{km}$ nad površjem Zemlje (potniško letalo) je danes omogočeno le redkim izbrancem. Potovanje izven Sončnega sistema ostaja znanstvena fantastika. Radijske antene ne moremo stlačiti v mikročip z nobeno tehnologijo. Nekatere ovire ostajajo za vedno nepremagljive za radijsko zvezo.

Končno, ko elektronska naprava dobi radijsko anteno, se naenkrat znajde v resničnem svetu motenj in nepredvidenih medsebojnih vplivov z drugimi napravami. Pogosto ne gre za načrtovalsko napako antene, pač pa za načrtovalsko napako elektronike oziroma celo napako programske opreme. Elektromagnetna združljivost oziroma EMC (Electro-Magnetic Compatibility) zahteva dobro poznavanje anten in razširjanja valov.

Elektromagnetno združljivost sicer urejajo strogi predpisi, ki naj bi omogočali sobivanje različnih naprav. Po drugi strani elektromagnetna združljivost ne more popraviti pomanjkljivosti strojne in programske opreme naše lastne naprave. Poznavanje anten in razširjanja valov je zato potrebno dosti širšemu krogu inženirjev od ozkega področja načrtovanja samih anten.

* * * * *

2. Krogelne koordinate

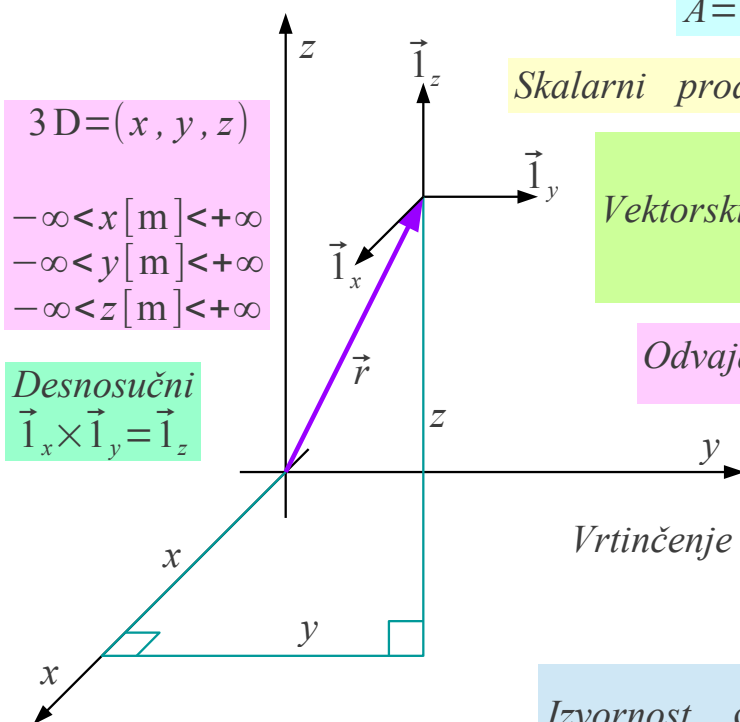
Večina nalog iz anten in razširjanje valov zahteva obravnavo v treh dimenzijah prostora. Tako skalarne kot vektorske veličine so funkcije časa in vseh treh dimenzij prostora. Ozkopasovne signale $B \ll f$ radia največkrat smemo v izračunih ponazoriti s harmonskim signalom ene same krožne frekvence $\omega = 2\pi f$, kar poenostavi časovne odvode v $\partial/\partial t = j\omega$.

Računanje s skalarnimi in vektorskimi funkcijami treh dimenzij prostora se da poenostaviti s koordinatnim sistemom, ki ima naslednje lastnosti:

- 1) tri dimenzije (3D),
- 2) pravokotnost med koordinatnimi osmi (pravokotni) in
- 3) vgrajeno pravilo desnega vijaka (desnosučni).

Od primernih koordinatnih sistemov je najpreprostejši kartezični koordinatni sistem:

Kartezične koordinate



$$3D = (x, y, z)$$

$$-\infty < x [m] < +\infty$$

$$-\infty < y [m] < +\infty$$

$$-\infty < z [m] < +\infty$$

Desnosučni

$$\vec{i}_x \times \vec{i}_y = \vec{i}_z$$

Komponente

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = \vec{i}_x A_x + \vec{i}_y A_y + \vec{i}_z A_z$$

Skalarni produkt $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Vektorski produkt

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Odvajanje

$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Vrtinčenje

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Izvornost

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Pravokotni

$$\vec{i}_x \perp \vec{i}_y \perp \vec{i}_z \perp \vec{i}_x$$

Smerni odvod

$$\text{grad } T = \nabla T = \vec{i}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

Kartezični koordinatni sistem ima tri ravne koordinatne osi. Vse tri koordinatne osi imajo merske enote razdalje, običajno so to metri $[m]$. Odvajanje po koordinatah torej pomeni neposredno odvajanje po razdaljah.

Spoštovanje vrstnega reda pisanja koordinat (x, y, z) ohranja desnosučnost.

Posebnost kartezičnega koordinatnega sistema so konstantni enotni smerni vektorji $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ in $\vec{1}_z$, ki so neodvisni od položaja v prostoru $\vec{r} = (x, y, z)$. Pri računanju odvodov se smerniki $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ in $\vec{1}_z$ kartezičnega koordinatnega sistema obnašajo kot konstante, kar znatno poenostavi računanje.

Odvajanje vektorskih in skalarnih funkcij v prostoru lahko zapišemo z operaterjem ∇ , ki ima v kartezičnih koordinatah preprost zapis. Vrtinčenje vektorskega polja tedaj računamo kot vektorski produkt

$$\text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) \quad , \text{ izvornost vektorskega polja kot skalarni produkt}$$

$\text{div } \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r})$ in smerni odvod skalarnega polja kot produkt vektorja odvajanja s skalarjem $\text{grad } T(\vec{r}) = \nabla T(\vec{r})$.

Kartezični koordinatni sistem uporabimo tudi za opis oziroma definicijo vseh drugih 3D, pravokotnih in desnosučnih koordinatnih sistemov. Kartezični koordinatni sistem pogosto uporabljamo kot vmesno stopnjo pri pretvorbi poljubnega koordinatnega sistema v drugačen poljubni koordinatni sistem. Končno, ker so smerniki $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ in $\vec{1}_z$ kartezičnega koordinatnega sistema konstantni vektorji, z njihovo pomočjo najbolj preprosto računamo odvode smernikov drugih koordinatnih sistemov.

Kartezični koordinatni sistem žal ni najprimernejši za opis točkastih virov valovanja, na primer katerekoli antene na velikih razdaljah $r \gg d$. Za takšno nalogo je najprimernejši krogelni koordinatni sistem. Najbolj znan krogelni koordinatni sistem je zemljepisni koordinatni sistem. Koordinate zemljepisna dolžina $\lambda [^\circ]$, zemljepisna širina $\phi [^\circ]$ in nadmorska višina $h [m]$ tvorijo v zaporedju (λ, ϕ, h) 3D, pravokotni in desnosučni koordinatni sistem.

Zemljepisni koordinatni sistem ima nekaj pomanjkljivosti. Zapis koordinat v stopinjah $[^\circ]$ prinaša nerodnosti pri odvajanju kotnih funkcij. Nadmorski višini je treba vsaj prišteti polmer Zemlje, če slednjo smemo poenostaviti kot kroglo s polmerom $R_Z \approx 6378 \text{ km}$.

Pri antenah pogosteje uporabljamo krogelni koordinatni sistem (r, Θ, Φ) , kjer je $r [m]$ oddaljenost od izhodišča v enotah razdalje (metri), $\Theta [\text{rd}]$ je polarna razdalja (kot) v radianih in $\Phi [\text{rd}]$ je zemljepisna dolžina (kot) v radianih. Krogelne koordinate pisane v zaporedju

(r, Θ, Φ) tvorijo 3D, pravokotni in desnosučni koordinatni sistem:

Krogelne koordinate (tečaj z)

Pretvorba $(r, \Theta, \Phi) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = r \sin \Theta \cos \Phi$$

$$y = r \sin \Theta \sin \Phi$$

$$z = r \cos \Theta$$

$$\vec{l}_x = \vec{l}_r \sin \Theta \cos \Phi + \vec{l}_\Theta \cos \Theta \cos \Phi - \vec{l}_\Phi \sin \Phi$$

$$\vec{l}_y = \vec{l}_r \sin \Theta \sin \Phi + \vec{l}_\Theta \cos \Theta \sin \Phi + \vec{l}_\Phi \cos \Phi$$

$$\vec{l}_z = \vec{l}_r \cos \Theta - \vec{l}_\Theta \sin \Theta$$

$$3D = (r, \Theta, \Phi)$$

$$0 \leq r [\text{m}] < +\infty$$

$$0 \leq \Theta [\text{rd}] \leq \pi$$

$$0 \leq \Phi [\text{rd}] < 2\pi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$0 \leq \Theta \leq \pi \rightarrow \sin \Theta \geq 0$$

Pretvorba $(x, y, z) \rightarrow (r, \Theta, \Phi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Theta = \arccos(z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

$$\Phi = \arctan(y/x) \quad (\text{kvadrant?})$$

$$\vec{l}_r = \vec{l}_x \sin \Theta \cos \Phi + \vec{l}_y \sin \Theta \sin \Phi + \vec{l}_z \cos \Theta$$

$$\vec{l}_\Theta = \vec{l}_x \cos \Theta \cos \Phi + \vec{l}_y \cos \Theta \sin \Phi - \vec{l}_z \sin \Theta$$

$$\vec{l}_\Phi = -\vec{l}_x \sin \Phi + \vec{l}_y \cos \Phi$$

$$\text{Pravokotni} \quad \vec{l}_r \perp \vec{l}_\Theta \perp \vec{l}_\Phi \perp \vec{l}_r$$

$$\text{Desnosučni} \quad \vec{l}_r \times \vec{l}_\Theta = \vec{l}_\Phi$$

Severni tečaj $\Theta = 0$ krogelnega koordinatnega sistema najpogosteje izberemo v smeri osi $+z$ kartezičnega koordinatnega sistema. Ekvatorialna ravnina krogelnega koordinatnega sistema $\Theta = \pi/2$ tedaj ustreza ravnini xy oziroma $z = 0$ kartezičnega koordinatnega sistema. Oddaljenost od izhodišča $r \geq 0$ vzamemo vedno pozitivno ali enako nič. Polarna razdalja se giblje v mejah $0 \leq \Theta \leq \pi$ od severnega do južnega tečaja.

Vsi krogelni koordinatni sistemi so krivočrtni koordinatni sistemi. Poldnevnik in vzporednik sta krožni loki. Vsi trije smerni vektorji \vec{l}_r , \vec{l}_Θ in \vec{l}_Φ pri premikanju vzdolž poldnevnikov oziroma vzporednikov spreminjajo svojo smer! Smernike krogelnega koordinatnega sistema \vec{l}_r , \vec{l}_Θ in \vec{l}_Φ kot tudi obojestransko povezavo s smerniki kartezičnega koordinatnega sistema \vec{l}_x , \vec{l}_y in \vec{l}_z je zato smiselno zapisati s kotnimi funkcijami polarne razdalje $\Theta [\text{rd}]$ in zemljepisne dolžine $\Phi [\text{rd}]$.

Ker smerniki krogelnega koordinatnega sistema \vec{l}_r , \vec{l}_Θ in \vec{l}_Φ

niso konstante, operator odvajanja ∇ nima preprostega zapisa v krogelnih koordinatah. Poleg tega ∇ odvaja po razdaljah, koordinati $\Theta[\text{rd}]$ in $\Phi[\text{rd}]$ pa nimata merskih enot razdalje! Pri izračunu odvodov v poljubnem krivočrtnem koordinatnem sistemu (q_1, q_2, q_3) si pomagamo z Laméjevimi koeficienti oziroma faktorji skale h_1 , h_2 in h_3 :

$$\text{Laméjevi koeficienti } (q_1, q_2, q_3) \quad h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad i=1,2,3$$

$$\text{Kroglne koordinate } (r, \Theta, \Phi) \quad h_r=1 \quad h_\Theta=r[\text{m/rd}] \quad h_\Phi=r \sin \Theta[\text{m/rd}]$$

Smerni odvod

$$\text{grad } T = \vec{1}_{q1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial q_1} + \vec{1}_{q2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} + \vec{1}_{q3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial q_3} = \vec{1}_r \frac{\partial T}{\partial r} + \vec{1}_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \Theta} + \vec{1}_\Phi \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial T}{\partial \Phi}$$

$$\begin{aligned} \text{Izvornost} \quad \text{div } \vec{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 F_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 F_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 F_3)}{\partial q_3} \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial (\sin \Theta F_\Theta)}{\partial \Theta} + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial F_\Phi}{\partial \Phi} \end{aligned}$$

Vrtinčenje

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{1}_{q1} & h_2 \vec{1}_{q2} & h_3 \vec{1}_{q3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \begin{vmatrix} \vec{1}_r & r \vec{1}_\Theta & r \sin \Theta \vec{1}_\Phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ F_r & r F_\Theta & r \sin \Theta F_\Phi \end{vmatrix}$$

Odvajanje v krogelnih koordinatah

V krogelnih koordinatah (r, Θ, Φ) je samo $h_r=1$ neimenovana konstanta. Ostala dva Laméjeva koeficienta h_Θ in h_Φ sta funkciji koordinat in imata merske enote $[\text{m/rd}]$, da pretvarjata radiane v metre.

Pretvorba merskih enot zadošča pri izračunu smernega odvoda. Pri izračunu izvornosti moramo odvajati tudi spreminjanje ploskvic v krivočrtnih koordinatah, pri izračunu vrtinčenja pa spreminjanje razdalj v krivočrtnih koordinatah. Pri izračunu izvornosti in vrtinčenja v krogelnih koordinatah zato odvajamo tudi Laméjeve koeficiente.

Pri praktični uporabi krogelnih koordinat skušamo zasukati koordinatni sistem tako, da je naloga rotacijsko simetrična okoli osi z oziroma neodvisna od zemljepisne dolžine $\partial/\partial \Phi=0$. Računanje se v tem primeru poenostavi v 2D nalogo koordinat (r, Θ) . Rotacijska simetrija pri tem ne

preprečuje, da vektorske veličine nimajo komponent vseh treh smereh $\vec{1}_r$, $\vec{1}_\Theta$ in $\vec{1}_\Phi$, le odvisnosti od tretje koordinate ni.

Inženir rešuje komplicirano nalogo tako, da jo razstavi v več manjših in bolj preprostih nalog. Rešitve slednjih na koncu sestavi v skupni rezultat. Večina preprostih nalog iz anten ima rotacijsko simetrijo, kar upoštevamo pri izbiri tečaja krogelnega koordinatnega sistema. Izbrani krogelni koordinatni sistem žal največkrat ne ustreza končnemu skupnemu rezultatu, ki mogoče nima nobene rotacijske simetrije.

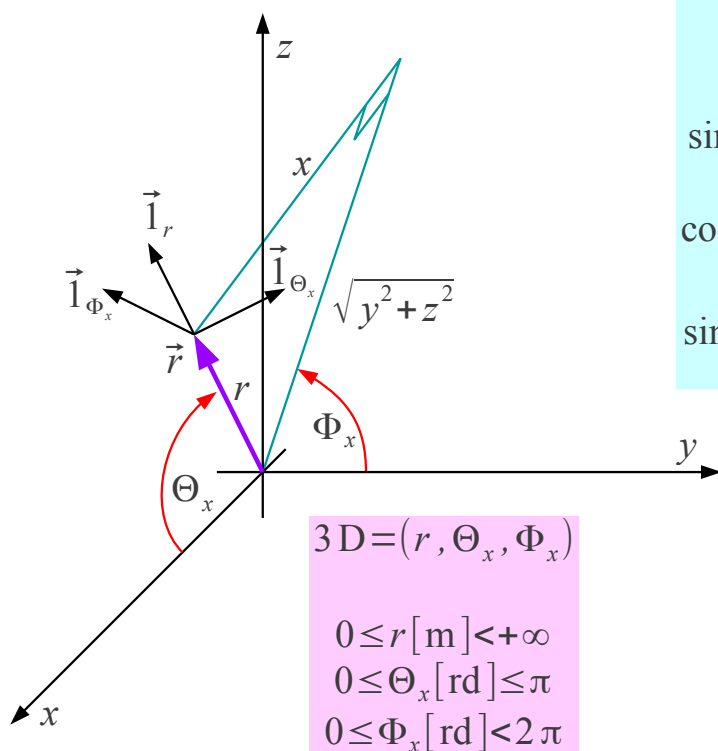
Reševanje sestavljenih nalog iz anten zahteva uporabo več različnih krogelnih koordinatnih sistemov, ki imajo večinoma sicer vsi skupno izhodišče, ampak različne tečaje. Tehnično zanimivi zgledi imajo osi rotacijske simetrije postavljene pod pravim kotom. Računanje torej potrebuje do tri različne krogelne koordinatne sisteme, ki imajo tečaje v smeri osi x oziroma y oziroma z .

Postopek reševanja opisanih nalog je naslednji. Krogelni koordinatni sistem (r, Θ, Φ) najprej zasukamo tako, da tečaj ustreza osi simetrije preproste antene. Preprosto nalogo rešimo v tem koordinatnem sistemu. Anteno nato zasukamo tako, kot to zahteva končna rešitev sestavljene naloge. Izračunano rešitev pretvorimo iz začasnih koordinat v dokončne koordinate.

Za reševanje praktičnih antenskih nalog je smiselno definirati dva nova krogelna koordinatna sistema (r, Θ_x, Φ_x) in (r, Θ_y, Φ_y) s severnim tečajem v smeri osi x oziroma y . V kartezičnih koordinatah opišemo isto s cikličnim zamikom koordinat (x, y, z) v (y, z, x) oziroma (z, x, y) , kar ohranja desnosučnost!

Krogelni koordinatni sistem (r, Θ_x, Φ_x) ima severni tečaj v smeri osi $+x$ in ekvatorialno ravnino yz oziroma $x=0$. Polarno razdaljo $\Theta_x[\text{rd}]$ merimo od osi $+x$ do smeri \vec{r} , zemljepisno dolžino $\Phi_x[\text{rd}]$ pa od osi $+y$ do projekcije \vec{r} na ravnino yz :

Kroglne koordinate - tečaj x



$$0 \leq \Theta_x \leq \pi \rightarrow \sin \Theta_x = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi} \geq 0$$

Pretvorba $(r, \Theta_x, \Phi_x) \rightarrow (r, \Theta, \Phi)$

$$\cos \Theta_x = \frac{x}{r} = \sin \Theta \cos \Phi$$

$$\sin \Theta_x = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r} = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}$$

$$\cos \Phi_x = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{\sin \Theta \sin \Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}}$$

$$\sin \Phi_x = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{\cos \Theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}}$$

Smerniki

$$\vec{1}_r = \vec{1}_r$$

$$\vec{1}_{\Theta_x} = \frac{-\vec{1}_{\Theta} \cos \Theta \cos \Phi + \vec{1}_{\Phi} \sin \Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}}$$

$$\vec{1}_{\Phi_x} = \frac{-\vec{1}_{\Theta} \sin \Phi - \vec{1}_{\Phi} \cos \Theta \cos \Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}}$$

Za koordinate (r, Θ_x, Φ_x) veljajo popolnoma enake zahteve kot za običajne krogelne koordinate (r, Θ, Φ) , le smer tečaja je drugačna. Koordinata r in pripadajoči smernik $\vec{1}_r$ sta popolnoma enaka v vseh krogelnih koordinatnih sistemih s skupnim izhodiščem.

Pretvorba rešitve iz koordinat (r, Θ_x, Φ_x) v koordinate (r, Θ, Φ) torej zahteva le pretvorbo kotov Θ_x in Φ_x ter pripadajočih smernikov $\vec{1}_{\Theta_x}$ in $\vec{1}_{\Phi_x}$ v pripadajoče veličine ciljnega koordinatnega sistema. Ker poznamo oboje-smerno povezavo obeh krogelnih koordinatnih sistemov (r, Θ_x, Φ_x) in (r, Θ, Φ) s kartezičnim koordinatnim sistemom (x, y, z) , koordinate in smernike v vmesnem koraku pretvorimo v pripadajoče kartezične veličine.

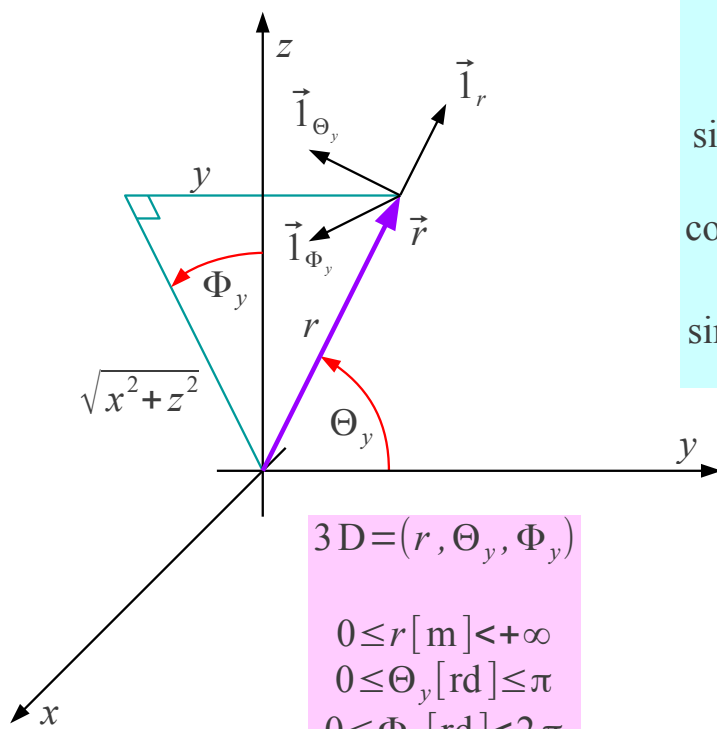
Rezultat antenske naloge (r, Θ_x, Φ_x) je običajno izražen s kotnimi funkcijami $\sin \Theta_x$, $\cos \Theta_x$, $\sin \Phi_x$ in $\cos \Phi_x$, zato je smiselno izraziti slednje s kotnimi funkcijami $\sin \Theta$, $\cos \Theta$, $\sin \Phi$ in $\cos \Phi$ ciljnih koordinat (r, Θ, Φ) . Območje krogelnih koordinat zahteva

$\sin \Theta_x = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi} \geq 0$, torej predznak korena ni vprašljiv! Podobno

je smiselno izraziti smernika $\vec{1}_{\Theta_x}$ in $\vec{1}_{\Phi_x}$ s smernikoma $\vec{1}_{\Theta}$ in $\vec{1}_{\Phi}$, saj ležijo vsi štirje omenjeni smerniki v isti ravnini, pravokotni na smer $\vec{1}_r$!

Krogelni koordinatni sistem (r, Θ_y, Φ_y) ima severni tečaj v smeri osi $+y$ in ekvatorialno ravnino xz oziroma $y=0$. Polarno razdaljo $\Theta_y[\text{rd}]$ merimo od osi $+y$ do smeri \vec{r} , zemljepisno dolžino $\Phi_y[\text{rd}]$ pa od osi $+z$ do projekcije \vec{r} na ravnino xz :

Krogelne koordinate - tečaj y



$$0 \leq \Theta_y \leq \pi \rightarrow \sin \Theta_y = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi} \geq 0$$

Pretvorba $(r, \Theta_y, \Phi_y) \rightarrow (r, \Theta, \Phi)$

$$\begin{aligned} \cos \Theta_y &= \frac{y}{r} = \sin \Theta \sin \Phi \\ \sin \Theta_y &= \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{r} = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi} \\ \cos \Phi_y &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\cos \Theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi}} \\ \sin \Phi_y &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\sin \Theta \cos \Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi}} \end{aligned}$$

Smerniki

$$\begin{aligned} \vec{1}_r &= \vec{1}_r \\ \vec{1}_{\Theta_y} &= \frac{-\vec{1}_{\Theta} \cos \Theta \sin \Phi - \vec{1}_{\Phi} \cos \Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi}} \\ \vec{1}_{\Phi_y} &= \frac{\vec{1}_{\Theta} \cos \Phi - \vec{1}_{\Phi} \cos \Theta \sin \Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi}} \end{aligned}$$

Koordinata r in pripadajoči smernik $\vec{1}_r$ sta popolnoma enaka v vseh krogelnih koordinatnih sistemih s skupnim izhodiščem (r, Θ_x, Φ_x) , (r, Θ_y, Φ_y) in (r, Θ, Φ) . Kotne funkcije $\sin \Theta_y$, $\cos \Theta_y$, $\sin \Phi_y$ in $\cos \Phi_y$ koordinat (r, Θ_y, Φ_y) je smiselno izraziti slednje s kotnimi funkcijami $\sin \Theta$, $\cos \Theta$, $\sin \Phi$ in $\cos \Phi$ ciljnih koordinat (r, Θ, Φ) . Območje krogelnih koordinat zahteva

$\sin \Theta_y = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi} \geq 0$, torej predznak korena ni vprašljiv! Podobno je smiselno izraziti smernika $\vec{1}_{\Theta_y}$ in $\vec{1}_{\Phi_y}$ s smernikoma $\vec{1}_{\Theta}$ in $\vec{1}_{\Phi}$, saj ležijo vsi štirje omenjeni smerniki v isti ravnini, pravokotni na smer $\vec{1}_r$!

Ko reševanje naloge zahteva dva različna krogelna koordinatna sistema z različnima izhodiščema, je edina smotrna pot preračunavanje preko vmesnih kartezičnih koordinat (x, y, z) .

* * * * *

3. Osnovni viri sevanja

Pojave mirujočih električnih nabojev opisuje elektrostatika. Relativistika zahteva dodatne pojave enakomerno gibajočih električnih nabojev, kar običajno imenujemo magnetostatika. Relativistika še dodatno zahteva, da pospešeni električni naboji sevajo elektromagnetno valovanje. Pospešeno gibanje vključuje tudi kroženje oziroma nihanje.

Gibanje elektronov predstavlja prevodniški tok oziroma konvektivni tok. Hitrost gibanja $\vec{v} \neq 0$ mora biti dovolj velika, da magnetne pojave sploh opazimo v ozadju elektrostatike. Preprost primer pospešenega gibanja sta izmenični prevodniški tok oziroma izmenični konvektivni tok. Frekvenca izmeničnega toka $\omega \neq 0$ mora biti dovolj visoka, da elektromagnetno sevanje sploh opazimo v ozadju elektrostatike in magnetostatike.

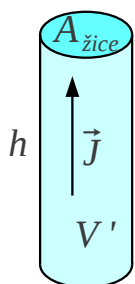
Pojav sevanja elektromagnetnega valovanja razložimo na preprostih osnovnih virih sevanja. Izbrani zgledi so sicer neučinkovite antene, ker so majhni $d \ll \lambda$ v primerjavi z valovno dolžino, na primer Teslov transformator ali feritna antena. Večje ter predvsem bolj učinkovite antene sestavimo iz vsote številnih majhnih osnovnih virov sevanja oziroma integrala diferencialno majhnih osnovnih virov sevanja.

Preprosti zgledi električno majhnih anten so torej osnovni viri sevanja. Delovanje slednjih moramo natančno preučiti, da lahko razumemo delovanje vseh večjih anten. Osnovni vir sevanja postavimo v izhodišče krogelnega koordinatnega sistema (r, Θ, Φ) in ga zasukamo tako, da je obravnava najenostavnejša. Osnovni viri sevanja običajno omogočajo rotacijsko simetrijo $\partial/\partial\Phi = 0$, da so vse veličine funkcija samo preostalih dveh krogelnih koordinat r in Θ .

Zelo pomemben osnovni vir sevanja je tokovni element, to je kratek košček kovinske žice dolžine h s prevodniškim tokom I . Statično magnetno polje tokovnega elementa opisuje Biot-Savartov zakon. V njegovi izvorni obliki Jean-Baptiste Biot in Félix Savart leta 1820 nista upoštevala elektromagnetnega sevanja.

Točno magnetno polje tokovnega elementa izračunamo v elektrodinamiki preko računskega obrazca za zakasneni vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$. Tokovni element postavimo v izhodišče krogelnega koordinatnega sistema (r, Θ, Φ) in žico usmerimo v os z za rotacijsko simetrijo $\partial/\partial\Phi = 0$. Prevodniški tok I ponazorimo z vektorjem gostote toka

$\vec{J}(\vec{r}')$ v prostornini žice V' :



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{1}_z \frac{I}{A_{\text{žice}}}$$

$$dV' = A_{\text{žice}} dz'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \vec{1}_z I \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dz'$$

Poenostavitve:

$$(1) \quad h \ll r \rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

$$(2) \quad h \ll \lambda = \frac{2\pi}{k} \rightarrow e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx e^{-jkr}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{1}_z \frac{\mu I h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} = (\vec{1}_r \cos \Theta - \vec{1}_\Theta \sin \Theta) \frac{\mu I h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\vec{1}_z = \vec{1}_r \cos \Theta - \vec{1}_\Theta \sin \Theta$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{1}_\Phi \frac{I h}{4\pi} e^{-jkr} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta$$

Sevanje

Biot-Savart

Tokovni element

Pri računu upoštevamo poenostavitve, da je žica h kratka in njen presek $A_{\text{žice}}$ še manjši. Tokovni element je kratek $h \ll r$ v primerjavi z oddaljenostjo točke opazovanja in hkrati kratek $h \ll \lambda$ v primerjavi z valovno dolžino. Slednji pogoj omogoča doseganje skoraj konstantne gostote toka $\vec{J}(\vec{r}') = \text{konst.}$ tudi v praktični napravi. Znameniti Teslov transformator popolnoma ustreza vsem omenjenim zahtevam!

Poenostavitev $h \ll r$ dopušča, da pri integraciji zanemarimo spreminjanje amplitude v integralu. Poenostavitev $h \ll \lambda$ dopušča, da pri integraciji zanemarimo spreminjanje faze v integralu. Obe poenostavitvi skupaj dopuščata, da integral po prostornini žice V' zamenjamo s preprostim produktom veličin. V končnem rezultatu za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ moramo samo še zamenjati smernik $\vec{1}_z$ kartezičnega koordinatnega sistema (x, y, z) s smerniki krogelnega koordinatnega sistema (r, Θ, Φ) .

Magnetno poljsko jakost $\vec{H}(\vec{r}) = 1/\mu \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$ dobimo po definiciji z

izračunom vrtnčenja vektorskega potenciala. Končni rezultat pogosto imenujemo tudi razširjeni oziroma dopolnjeni Biot-Savartov zakon. Poleg samoumevne zakasnitve e^{-jkr} omejene hitrosti svetlobe in statičnega člena $1/r^2$ izvirnega Biot-Savartovega zakona vsebuje točen rezultat še sevalni člen jk/r v elektrodinamiki!

V magnetostatiki $\omega=0$ izgineta oba: fazni zasuk zakasnitve in sevalni člen zaradi $k=\omega\sqrt{\mu\epsilon}=0$. Izvirni Biot-Savartov zakon torej natančno velja v magnetostatiki in ostaja uporaben pri nizkih frekvencah na majhnih razdaljah. Pri visokih frekvencah oziroma na velikih razdaljah postane sevalni člen jk/r znatno večji od statičnega člena $1/r^2$.

Izvirni Biot-Savartov zakon velja samo v primeru, ko več odsekov žice sestavimo v sklenjeno zanko, saj električni tok ne more iz nič izvirati niti v nič ponirati. Izvirni Biot-Savartov zakon nič ne govori o električnem polju $\vec{E}(\vec{r})$, saj to ni stvar magnetostatike. Izračun $\vec{E}(\vec{r})=1/j\omega\epsilon \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r})$ po Ampèrovem zakonu v okolici žice brez tokov $\vec{J}(\vec{r})=0$ daje rezultat:

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{j\omega\epsilon} \operatorname{rot} \vec{H}=\frac{Ih}{4\pi j\omega\epsilon} e^{-jkr} \left[\vec{1}_r \left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2\cos\Theta + \vec{1}_\Theta \left(-\frac{k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin\Theta \right]$$

Zveznost
toka/elektrine
 $I=j\omega Q$

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{Qh}{4\pi} e^{-jkr} \left[\vec{1}_r \left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2\cos\Theta + \vec{1}_\Theta \left(-\frac{k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin\Theta \right]$$

$$\frac{1}{\omega\epsilon}=\frac{1}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}=\frac{Z}{k}$$

Točkasti statični električni dipol

$$\vec{S}(\vec{r})=\frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^*=\frac{|I|^2 h^2 Z}{32\pi^2 k} \left[\vec{1}_r \left(\frac{k^3}{r^2} - \frac{j}{r^5} \right) \sin^2\Theta + \vec{1}_\Theta \left(\frac{jk^2}{r^3} + \frac{j}{r^5} \right) 2\cos\Theta \sin\Theta \right]$$

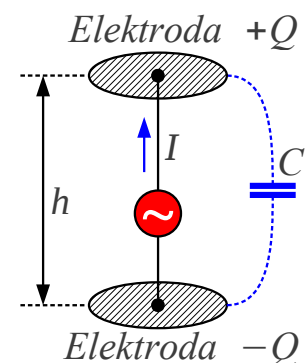
Sevanje

$$P=\oint_{r\rightarrow\infty} \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_r r^2 \sin\Theta d\Theta d\Phi=\frac{|I|^2 h^2 Z k^2}{12\pi}$$

$$R_s=\frac{2P}{|I|^2}=\frac{Zk^2 h^2}{6\pi}=\frac{2\pi Z}{3} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2$$

Dinamični električni dipol

$$h \ll \lambda \rightarrow R_s \ll \frac{1}{\omega C}$$



V točni obravnavi elektrodinamike zveznost toka in elektrine zahteva,

da izvor toka povzroči primanjkljaj elektrine, ponor toka pa kopičenje elektrine na koncu žice $I = dQ/dt = j\omega Q$. Če v izpeljanem izrazu za električno polje nadomestimo tok s pripadajočo elektrino na koncu žice, dobimo polje točkastega električnega dipola. V neposredni bližini naprave sta statična člena polja električnega dipola izredno velika.

Električno polje $|\vec{E}(\vec{r})| \gg Z|\vec{H}(\vec{r})|$ je v bližini vira dosti večje od magnetnega polja v merilu valovne impedance prostora $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$. Čeprav izpeljava začenja z Biot-Savartovim zakonom za magnetno polje, je tokovni element v resnici točkasti dinamični električni dipol. Poskus potrjuje teorijo: Teslov transformator proizvaja v svoji neposredni okolici ogromno električno polje in čudovite iskre.

Kaj pomenijo različni členi električnega in magnetnega polja nam nazorno opiše Poyntingov vektor gostote pretoka moči $\vec{S}(\vec{r})$. Sevalni členi električnega in magnetnega polja dajejo od nič različno $\text{Re}[\vec{S}(\vec{r})] \neq 0$ realno komponento Poyntingovega vektorja. Slednja pomeni delovno moč, ki se iz vira širi v prostor v neskončnost.

Elektrostatika oziroma magnetostatika dopuščata samo jalovo moč, električno oziroma magnetno energijo, ki niha v okolici naprave. Opisana delovna moč $P(r \rightarrow \infty)$, ki se širi v neskončnost in se nikoli več ne vrne, nima razlage niti v elektrostatiki niti v magnetostatiki. Novi pojav imenujemo elektromagnetno sevanje in je posledica pospešenega gibanja elektronov.

Praktično napravo izdelamo tako, da oba konca žice zaključimo na kovinskih elektrodah ("kapa" Teslovega transformatorja). Kapacitivnost med elektrodama omogoča, da po žici poženemo tok z izmeničnim generatorjem. Tudi če izdelamo žico iz superprevodnika brez električne upornosti, generator občuti poleg reaktivne impedance kondenzatorja $X_C = -1/\omega C$ tudi povsem delovno sevalno upornost $R_S > 0$. Slednja ne pomeni pretvarjanja električne moči v toploto, pač pa zagotavlja moč elektromagnetnemu sevanju, ki se širi v prostor v neskončnost.

Pri majhnih napravah $h \ll \lambda$ je sevalna upornost $R_S \ll |X_C|$ zelo majhna v primerjavi z jalovo impedanco kondenzatorja. Nikola Tesla je kapacitivnost kompenziral z induktivnostjo sekundarnega navitja transformatorja na rezonančni frekvenci $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Upornost navitja $R_{Cu} \gg R_S$ je za več velikostnih razredov višja od sevalne upornosti, da slednje ni moč opaziti kaj šele izmeriti. Teslov transformator večino električne moči pretvori v toploto v navitjih oziroma jo odda porabnikom v neposredni bližini preko kapacitivnega sklopa, seva pa zelo malo!

Nekoliko drugačen osnovni vir sevanja je majhna $\sqrt{A'} \ll \lambda$ krožna tokovna zanka iz kovinske žice s prevodniškim tokom I . Točno magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$ tokovne zanke izračunamo v elektrodinamiki preko računskega obrazca za zakasneni vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$. Krožno zanko postavimo v izhodišče krogelnega koordinatnega sistema (r, Θ, Φ) v ravnino xy tako, da os zanke sovpada z osjo z za rotacijsko simetrijo $\partial/\partial\Phi=0$. Prevodniški tok I ponazorimo z vektorjem gostote toka $\vec{J}(\vec{r}')$ v prostornini žice V' :

Tokovna zanka

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(r \sin \Theta \cos \Phi - a \cos \Phi')^2 + (r \sin \Theta \sin \Phi - a \sin \Phi')^2 + (r \cos \Theta)^2}$$

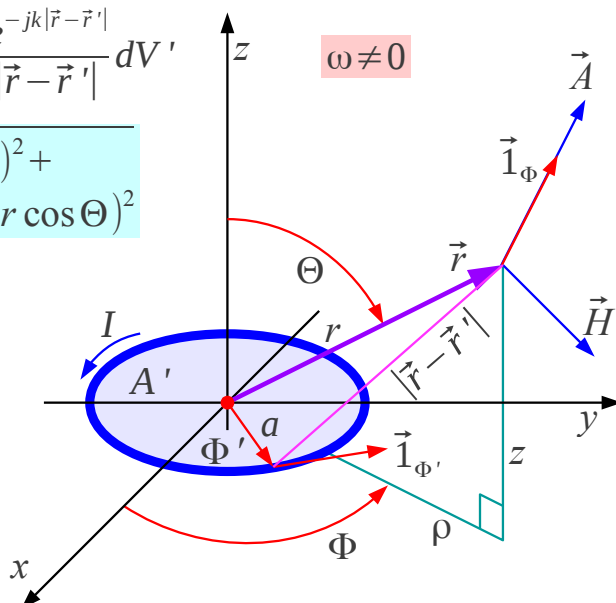
$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{1}_{\Phi'} \frac{I}{A_{\text{žice}}}$$

$$dV' = A_{\text{žice}} a d\Phi'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \vec{1}_{\Phi'} I \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} a d\Phi'$$

$$\vec{1}_{\Phi'} = -\vec{1}_x \sin \Phi' + \vec{1}_y \cos \Phi'$$

$$-\vec{1}_x \sin \Phi + \vec{1}_y \cos \Phi = \vec{1}_{\Phi}$$



$\omega \neq 0$

Poenostavitve:

$$(1) \quad a \ll r \rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a}{r} \sin \Theta \cos(\Phi - \Phi') \right]$$

$$(2) \quad a \ll \lambda \rightarrow e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx e^{-jkr} \left[1 + jka \sin \Theta \cos(\Phi - \Phi') \right]$$

Površina zanke

$$A' = \pi a^2$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{1}_{\Phi} \frac{\mu}{4\pi} I (\pi a^2) e^{-jkr} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta = \vec{1}_{\Phi} \frac{\mu}{4\pi} I A' e^{-jkr} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta$$

Pri računu upoštevamo poenostavitve, da je krožna zanka polmera a majhna in presek žice $A_{\text{žice}}$ še manjši. Tokovna zanka je kratka $a \ll r$ v primerjavi z oddaljenostjo točke opazovanja in hkrati kratka $a \ll \lambda$ v primerjavi z valovno dolžino. Slednji pogoj omogoča doseganje skoraj konstantne gostote toka $\vec{J}(\vec{r}') = \text{konst.}$ tudi v praktični napravi.

Poenostavitev $a \ll r$ dopušča, da pri integraciji poenostavimo spreminjanje amplitude v integralu na dva največja člena vrste. Poenostavitev $a \ll \lambda$ dopušča, da pri integraciji poenostavimo spreminjanje faze v

integralu na dva največja člena vrste. Smernik $\vec{1}_{\Phi'} = -\vec{1}_x \sin \Phi' + \vec{1}_y \cos \Phi'$ zapišemo s konstantnima smernikoma kartezičnega koordinatnega sistema (x, y, z) , da vse integrirane veličine vsebujejo le kotne funkcije integracijske spremenljivke Φ' .

V končnem rezultatu integracije se največji členi natančno izničijo. Rezultat pretvorimo iz kartezičnih smernikov $-\vec{1}_x \sin \Phi + \vec{1}_y \cos \Phi = \vec{1}_{\Phi}$ nazaj na smernik zemljepisne dolžine Φ krogelnih koordinat. Ko veljata obe poenostavitvi $a \ll r$ in $a \ll \lambda$ ter je tok v zanki $I = konst.$ konstanten, je končni rezultat za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ odvisen le od površine zanke $A' = \pi a^2$, popolnoma nič pa od njene oblike. Krožna, kvadratna, trikotna ali šest-oglasta zanka enake površine dajejo enak rezultat!

Magnetno poljsko jakost $\vec{H}(\vec{r}) = 1/\mu \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$ dobimo po definiciji z izračunom vrtinčenja vektorskega potenciala. Rezultat ustreza polju točkastega dinamičnega magnetnega dipola:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{IA'}{4\pi} e^{-jkr} \left[\vec{1}_r \left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2 \cos \Theta + \vec{1}_{\Theta} \left(-\frac{k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin \Theta \right]$$

Sevanje
Točkasti statični magnetni dipol

$$\rho(\vec{r}') = 0 \rightarrow \text{grad } V(\vec{r}) = 0 \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) \quad \omega \mu = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = k Z$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{1}_{\Phi} \frac{j\omega \mu I A'}{4\pi} e^{-jkr} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta = \vec{1}_{\Phi} \frac{Z I A'}{4\pi} e^{-jkr} \left(\frac{k^2}{r} - \frac{jk}{r^2} \right) \sin \Theta$$

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{|I|^2 (A')^2 Z}{32\pi} \left[\vec{1}_r \left(\frac{k^4}{r^2} + \frac{jk}{r^5} \right) \sin^2 \Theta - \vec{1}_{\Theta} \left(\frac{jk^3}{r^3} + \frac{jk}{r^5} \right) 2 \cos \Theta \sin \Theta \right]$$

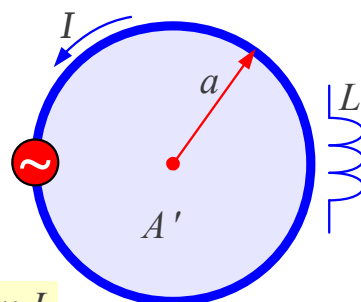
Sevanje

$$P = \oint_{r \rightarrow \infty} \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_r r^2 \sin \Theta d\Theta d\Phi = \frac{|I|^2 (A')^2 Z k^4}{12\pi}$$

$$R_s = \frac{2P}{|I|^2} = \frac{Z k^4 (A')^2}{6\pi} = \frac{8\pi^3 Z}{3} \left(\frac{A'}{\lambda^2} \right)^2$$

Dinamični magnetni dipol

$$\sqrt{A'} \ll \lambda \rightarrow R_s \ll \omega L$$



Ker v sklenjeni zanki konstanten tok nikjer ne izvira niti ponira, na zanki ni mirujočih elektronov. Smerni odvod skalarne potenciala $\text{grad } V(\vec{r}) = 0$ je

povsod v prostoru enak nič. Električno poljsko jakost $\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r})$ preprosto dobimo zgolj iz vektorskega potenciala tokovne zanke.

Magnetno polje $|\vec{H}(\vec{r})| \gg |\vec{E}(\vec{r})|/Z$ je v bližini vira dosti večje od električnega polja v merilu valovne impedance prostora $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$. Kaj pomenijo različni členi električnega in magnetnega polja nam tudi v primeru zanke nazorno opiše Poyntingov vektor gostote pretoka moči $\vec{S}(\vec{r})$. Statična člena magnetnega polja opisujeta magnetno energijo, ki niha v neposredni okolici naprave.

Sevalni členi električnega in magnetnega polja dajejo od nič različno $\text{Re}[\vec{S}(\vec{r})] \neq 0$ realno komponento Poyntingovega vektorja. Delovna moč $P(r \rightarrow \infty)$, ki se iz vira širi v prostor v neskončnost, zahteva od nič različno sevalno upornost $R_s > 0$ tokovne zanke. Majhna $\sqrt{A'} \ll \lambda$ tokovna zanka ima razmeroma veliko induktivno reaktivno impedanco $\omega L \gg R_s$ v primerjavi s sevalno upornostjo.

Praktično napravo izdelamo kot tuljavo velikega preseka A' z N ovoji. Sevalna upornost $R_s = N^2 R_{s1}$ se pri tem povečuje s kvadratom števila ovojov. Induktivna reaktanca tuljave $X_L = \omega L = N^2 \omega L_1$ se prav tako povečuje s kvadratom števila ovojov.

Višja induktivnost tuljave omogoča uporabo manjšega nastavljivega kondenzatorja za ugaševanje na rezonančno frekvenco $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Ker je upornost navitja tuljave $R_{cu} = N R_{cu1}$ le premo-sorazmerna številu ovojov, z večanjem števila ovojov narašča kvaliteta tuljave $Q = \omega L / R_{cu} \approx N Q_1$. Z večanjem števila ovojov narašča tudi sevalni izkoristek $\eta = R_s / (R_{cu} + R_s)$.

V obdobju med obema svetovnima vojnama v 20. stoletju se je uveljavila okvirna antena za sprejem srednje-valovnih oddajnikov. Okvirna antena je velika tuljava $A' \approx 1\text{m}^2$, ki hkrati deluje kot prvi nihajni krog, frekvenčno sito v preprostem sprejemniku z vakuumskimi elektronkami. Ker je okvirna antena magnetni dipol, je manj občutljiva na električno polje motilcev v neposredni bližini.

Pri sprejemu pokončno polariziranega elektromagnetnega valovanja ima okvirna antena dva ostra in točno določena minimuma (ničli) sprejema v vodoravni ravnini. Slednji pojav lahko koristno uporabimo tako, da z obračanjem antene izločimo motnje neželenega oddajnika. Z okvirno anteno se začena tudi radiolokacija, iskanje skritega oddajnika in radionavigacija z

radijskim kompasom:

$$R_s = \frac{Z k^4 (N A')^2}{6 \pi} = \frac{8 \pi^3 Z}{3} \left(\frac{N A'}{\lambda^2} \right)^2$$

$$f \approx 300 \text{ kHz}$$

$$A' \approx 1 \text{ m}^2$$

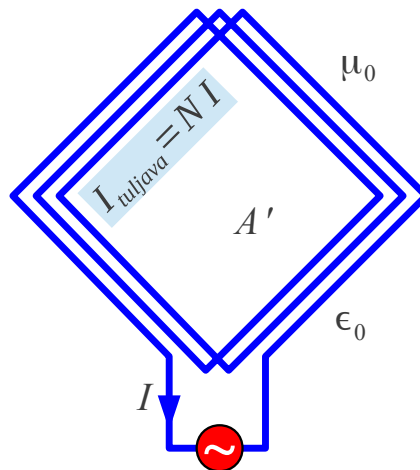
$$N \approx 10$$

Zrak

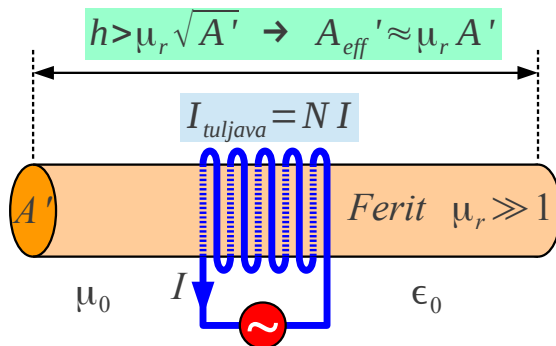
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$$

$$\lambda = c_0 / f = 1 \text{ km}$$

$$R_s \approx 3.1 \mu \Omega$$



Okvirna antena ~1930



Feritna antena ~1970

$$R_s = \frac{Z k^4 (\mu_r N A')^2}{6 \pi} = \frac{8 \pi^3 Z}{3} \left(\frac{\mu_r N A'}{\lambda^2} \right)^2$$

$$f \approx 1 \text{ MHz}$$

$$A' \approx 1 \text{ cm}^2$$

$$h \approx 20 \text{ cm}$$

$$\mu_r \approx 100$$

$$N \approx 30$$

Zrak

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$$

$$\lambda = c_0 / f = 300 \text{ m}$$

$$R_s \approx 0.35 \mu \Omega$$

Sodobna izvedba okvirne antene za srednje valove je feritna antena v tranzistorskih radijskih sprejemnikih. V frekvenčnem področju srednjih valov razpoložljivi feriti dosegajo relativno permeabilnost $\mu_r \approx 100$, kar omogoča 100-krat manjšo površino zanke.

Sevalna upornost tokovne zanke je izredno majhna, saj upada kar s četrto potenco valovne dolžine $R_s = \alpha \lambda^{-4}$. Sevalna upornost praktične okvirne antene oziroma praktične feritne antene je v razredu $[\mu \Omega]$. Kljub slabemu sevalnemu izkoristku je okvirna antena uporabna za sprejem srednjih valov, saj je v tem frekvenčnem pasu naravni šum za več velikostnih razredov večji od šuma vakuumskih elektronk. Polprevodniki imajo še nižji šum od vakuumskih elektronk, kar omogoča uporabo še manjše feritne sprejemne antene s še slabšim sevalnim izkoristkom od okvirne antene.

Tokovni element in tokovna zanka sta dualna zгледа. Električno polje tokovnega elementa ima zelo podobno obliko magnetnemu polju tokovne zanke. Oba vsebujeta člene velikosti k^2/r (sevanje), k/r^2 in $1/r^3$ (statika) v merskih enotah $[\text{m}^{-3}]$. Na majhnih razdaljah $kr \ll 1$ je

največji statični člen $1/r^3$. Tokovni element se na majhnih razdaljah obnaša kot točkasti statični električni dipol. Tokovna zanka se na majhnih razdaljah obnaša kot točkasti statični magnetni dipol.

Magnetno polje tokovnega elementa ima zelo podobno obliko električnemu polju tokovne zanke. Oba vsebujeta člene velikosti k/r (sevanje) in $1/r^2$ (Biot-Savart) v merskih enotah $[m^{-2}]$. Na razdalji $kr=1$ oziroma $r=1/k=\lambda/2\pi=c_0/\omega$ postanejo vsi členi poljubnega polja obeh osnovnih virov enako veliki.

Pri omrežni frekvenci $f=50\text{Hz}$ z valovno dolžino $\lambda=6000\text{km}$ v praznem prostoru postanejo členi enako veliki na razdalji $r=955\text{km}$. V elektroenergetiki večinoma povsem zadoščajo računanje s statičnimi členi. Vsi ostali členi vključno s sevanjem so zanemarljivo majhni.

Pri frekvenci vidne (zelene) svetlobe $f=600\text{THz}$ z valovno dolžino $\lambda=0.5\mu\text{m}$ v praznem prostoru postanejo členi enako veliki na razdalji $r=80\text{nm}$. V optiki večinoma povsem zadošča računanje s sevanjem. Vsi ostali členi vključno s statiko so zanemarljivo majhni.

Pri frekvenci radijske zveze $f=900\text{MHz}$ z valovno dolžino $\lambda=33\text{cm}$ v praznem prostoru postanejo vsi členi enako veliki na razdalji $r=5.3\text{cm}$. Pri mobilnem telefonu moramo biti previdni, kdaj smemo uporabljati samo sevanje, kdaj smemo uporabljati samo statiko oziroma kdaj moramo uporabljati točen izračun elektromagnetnega polja z vsemi členi!

Na velikih razdaljah $kr \gg 1$ oziroma $r \gg 1/k=\lambda/2\pi=c_0/\omega$ prevladuje sevanje kateregakoli osnovnega vira. Vsi ostali členi postanejo zanemarljivo majhni. Poenostavitve za sevanje niso zgolj matematični artefakt, pač pa imajo globlji fizikalni pomen in so nujne za razumevanje delovanja anten in pojavov pri razširjanju radijskih valov.

Elektromagnetno sevanje računamo preko enačb v diferencialni obliki, ki vsebujejo odvajanja v prostoru v obliki smernih odvodov, izvornosti in vrtinčenj. Kako praktično računamo odvode v krogelnih koordinatah (r, Θ, Φ) na velikih razdaljah $r \gg \lambda/2\pi$?

Točen zapis potencialov oziroma polja vsebuje člene oblike $r^{-n} e^{-jkr}$, kjer je eksponent $n=1,2,3$. Na velikih razdaljah prevladajo členi z $n=1$. Členi z $n \geq 2$ ali več tam postanejo zanemarljivo majhni. Odvajanje po razdalji prinese:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^{-n} e^{-jkr}) = -n r^{-(n+1)} e^{-jkr} - jk r^{-n} e^{-jkr} \approx -jk r^{-n} e^{-jkr}$$

Pri točnem izračunu odvoda produkta smemo prvi člen zanemariti, saj upada z razdaljo bistveno hitreje od drugega člena. Na velikih razdaljah $r \gg \lambda/2\pi$ se odvajanje po razdalji poenostavi v $\partial/\partial r \approx -jk$.

Odvajanje po smereh Θ oziroma Φ sicer ni enako nič. Pri izračunu smernega odvoda, izvornosti oziroma vrtinčenja odvajamo po razdaljah v smereh vseh treh koordinat. Laméjevi koeficienti h_Θ in h_Φ tedaj dodajo člen $1/r$ vsem odvodom po smereh. Odvodi po smereh zato postanejo na velikih razdaljah $r \gg \lambda/2\pi$ zanemarljivo majhni v primerjavi z odvodom po razdalji!

Fizikalna razlaga opisanih pojavov z matematičnimi odvodi je naslednja. Pri antenah in razširjanju valov imamo največkrat opraviti s kazalčno vsoto prispevkov istega velikostnega razreda. Pri tem se na velikih razdaljah $r \gg \lambda/2\pi$ amplituda posameznih prispevkov spreminja zelo počasi, saj so relativne spremembe razdalje zelo majhne v primerjavi z absolutno razdaljo.

Obratno se faza tudi na velikih razdaljah $r \gg \lambda/2\pi$ lahko hitro spreminja z razdaljo $\Delta\phi = k \Delta r = (2\pi/\lambda) \Delta r$, saj je hitrost spreminjanja odvisna od valovne dolžine, ne pa od absolutne vrednosti razdalje. V nalogah anten in razširjanja valov je spreminjanje faze daleč najpomembnejši podatek. Spreminjanje amplitude smemo pogosto zanemariti!

Smerni odvod, izvornost in vrtinčenje računamo s simboličnim vektorjem odvajanja ∇ , ki žal ima enostaven zapis samo v kartezičnih koordinatah (x, y, z) . Pri upoštevanju poenostavitev na velikih razdaljah $r \gg \lambda/2\pi$ se odvajanje silno poenostavi celo v krogelnih koordinatah (r, Θ, Φ) . Odličen približek za simbolični vektor odvajanja postane preprosto $\nabla = \vec{1}_r (-jk)$, kar je še dosti bolj enostavno od kartezičnih koordinat (x, y, z) :

Poenostavitve za sevanje

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$r \gg \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \approx -jk \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} \approx 0 \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Phi} \approx 0 \quad \nabla \approx \vec{1}_r (-jk)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \approx -\frac{jk}{\mu} \vec{1}_r \times \vec{A} = -\frac{j\omega}{Z} \vec{1}_r \times \vec{A} = \vec{1}_\Theta \frac{j\omega}{Z} A_\Phi - \vec{1}_\Phi \frac{j\omega}{Z} A_\Theta$$

$$\text{Lorenz } j\omega\mu \epsilon V + \text{div } \vec{A} = 0 \rightarrow V = \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot \vec{A} \approx \frac{j}{\omega\mu\epsilon} (-jk) A_r = \frac{k A_r}{\omega\mu\epsilon} = \frac{A_r}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \nabla V \approx -j\omega \vec{A} + jk \vec{1}_r \frac{A_r}{\omega\mu\epsilon} = -j\omega \left[\vec{A} - \vec{1}_r (\vec{1}_r \cdot \vec{A}) \right] = -j\omega \left[\vec{1}_\Theta A_\Theta + \vec{1}_\Phi A_\Phi \right]$$

$$\text{Gauss } \frac{\rho}{\epsilon} = 0 = \nabla \cdot \vec{E} \approx -jk \vec{1}_r \cdot \vec{E} = -jk E_r \quad 0 = \nabla \cdot \vec{H} \approx -jk \vec{1}_r \cdot \vec{H} = -jk H_r$$

$$\text{Sevano polje } \vec{1}_r \perp \vec{H} \perp \vec{E} \perp \vec{1}_r \quad E_r = 0 \quad H_r = 0 \quad \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$$

$$\text{Faraday } \vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \text{rot } \vec{E} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E} \approx \frac{j}{\omega\mu} (-jk) \vec{1}_r \times \vec{E} = \frac{\vec{1}_r \times \vec{E}}{Z} = -\vec{1}_\Theta \frac{E_\Phi}{Z} + \vec{1}_\Phi \frac{E_\Theta}{Z}$$

$$\text{Poynting } \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \approx \frac{\vec{E} \times (\vec{1}_r \times \vec{E})^*}{2Z} = \vec{1}_r \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{2Z} = \vec{1}_r \frac{|\vec{E}|^2}{2Z} = \vec{1}_z \frac{|\vec{E}_{\text{eff}}|^2}{Z} \quad \vec{E}_{\text{eff}} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{2}}$$

S preprostim simboličnim vektorjem odvajanja se izračun sevanja silno poenostavi. Pri izračunu magnetnega polja $\vec{H}(\vec{r})$ in električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$ ugotovimo, da sevano polje nima vzdolžne komponente. Isto zahteva tudi Gaussov zakon za električno polje $E_r = 0$ in magnetno polje $H_r = 0$.

Na velikih razdaljah $r \gg \lambda/2\pi$ so električno polje $\vec{E}(\vec{r})$, magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$ in smer potovanja valovanja $\vec{1}_r$ pravokotni med sabo. Električno polje in magnetno polje sta v točnem razmerju valovne impedance $|\vec{E}(\vec{r})|/|\vec{H}(\vec{r})| = Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$. V praznem prostoru znaša valovna impedanca približno $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \Omega \approx 120 \pi \Omega$. Na velikih razdaljah torej zadošča, da navedemo samo eno polje, na primer samo električno polje $\vec{E}(\vec{r})$, saj lahko iz njega preprosto določimo magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$ in obratno.

Sevano električno polje in pripadajoče magnetno polje sta sofazna, zato je Poyntingov vektor gostote moči popolnoma realen. Poyntingov vektor sevanja kaže v smeri potovanja valovanja $\vec{1}_r$ in ga lahko izračunamo zgolj

iz znanega električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$.

Pri računu gostote pretoka moči moramo biti pozorni na merske enote. V teoretskih izpeljavah običajno uporabljamo vršno vrednost harmonske veličine $|\vec{E}|$ v merskih enotah $[V/m]$. Merilni inštrumenti pogosto uporabljajo efektivno vrednost harmonske veličine $|\vec{E}_{eff}|$ v merskih enotah $[V_{eff}/m]$. Za harmonska veličine velja znana povezava $|\vec{E}_{eff}| = |\vec{E}|/\sqrt{2}$.

V radijskih zvezah na velike razdalje uporabljamo elektromagnetno sevanje. Pri tem je popolnoma vseeno, ali imajo uporabljene antene v neposredni bližini zelo močno električno ali pa zelo močno magnetno polje oziroma nič od navedenega. V zvezi s sevanjem ne velike razdalje lahko uporabimo različne vrste anten na obeh koncih zveze. Sevanje pomeni $|\vec{E}(\vec{r})|/|\vec{H}(\vec{r})| = Z$.

V zvezah na kratke razdalje lahko uporabimo tudi kapacitivni sklop ali pa induktivni sklop. Niti kapacitivni sklop niti induktivni sklop ne uporabljata sevanja. Na obeh koncih zveze moramo uporabiti enako vrsto antene. Na primer dva točkasta električna dipola $|\vec{E}(\vec{r})| \gg Z|\vec{H}(\vec{r})|$ za kapacitivni sklop ali pa dva točkasta magnetna dipola $|\vec{E}(\vec{r})| \ll Z|\vec{H}(\vec{r})|$ za induktivni sklop.

V praktični zvezi je na ovire najbolj občutljivo statično električno polje. Povrhu lahko statično električno polje proži nevarne iskre. Obratno prodre statično magnetno polje skozi večino ovir. V zvezah na kratke razdalje in za prenos energije se danes večinoma uporablja induktivni sklop.

Strogi predpisi elektromagnetne združljivosti (EMC) morajo upoštevati vse tri pojave: kapacitivni sklop, induktivni sklop in sevanje. Motnje merimo na predpisani razdalji od naprave, običajno $r = 10m$. Pri visokih frekvencah pri tem zadošča meritev gostote pretoka moči $|\vec{S}(\vec{r})|$ oziroma efektivne vrednosti električnega polja $|\vec{E}_{eff}(\vec{r})|$. Pri nizkih frekvencah predpisi zahtevajo ločeni meritvi efektivne vrednosti električnega polja $|\vec{E}_{eff}(\vec{r})|$ in efektivne vrednosti magnetnega polja $|\vec{H}_{eff}(\vec{r})|$.

* * * * *