# 2. Krogelne koordinate

Večina nalog iz anten in razširjanje valov zahteva obravnavo v treh dimenzijah prostora. Tako skalarne kot tudi vektorske veličine so funkcije časa in vseh treh dimenzij prostora. Ozkopasovne signale $B \ll f$ radia največkrat smemo v izračunih ponazoriti s harmonskim signalom ene same krožne frekvence $\omega = 2\pi f$, kar poenostavi časovne odvode v $\partial/\partial t = j\omega$.

Računanje s skalarnimi in vektorskimi funkcijami treh dimenzij prostora je mogoče poenostaviti s koordinatnim sistemom, ki ima naslednje lastnosti:
1) tri dimenzije (3D),
2) pravokotnost med koordinatnimi osmi (pravokotni) in
3) vgrajeno pravilo desnega vijaka (desnosučni).
Od primernih koordinatnih sistemov je najpreprostejši kartezični koordinatni sistem:

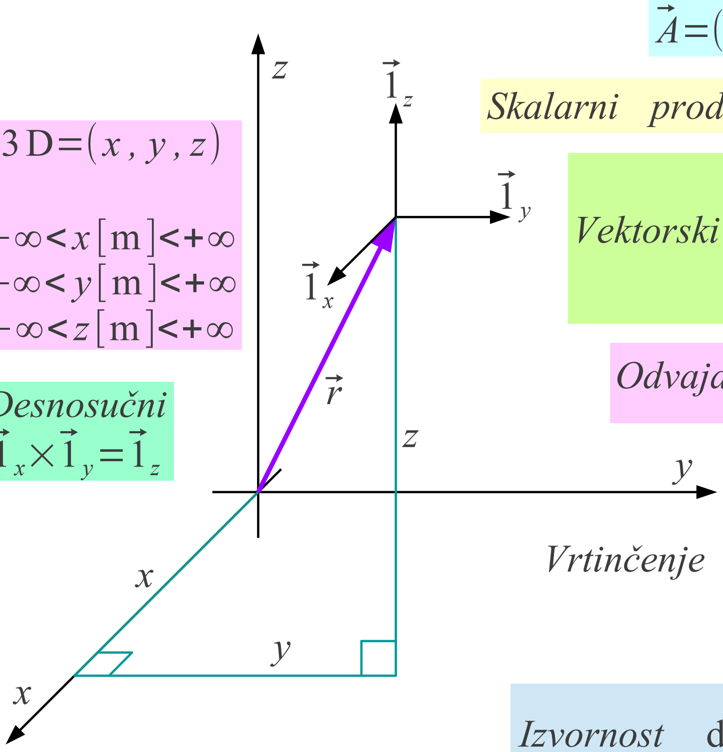
Kartezične koordinate

*Komponente*
$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = \vec{1}_x A_x + \vec{1}_y A_y + \vec{1}_z A_z$$

*Skalarni produkt* $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$3\mathrm{D} = (x, y, z)$

$-\infty < x[\mathrm{m}] < +\infty$
$-\infty < y[\mathrm{m}] < +\infty$
$-\infty < z[\mathrm{m}] < +\infty$




*Vektorski produkt*
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

*Odvajanje* $\nabla = \vec{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z}$

*Desnosučni*
$\vec{1}_x \times \vec{1}_y = \vec{1}_z$

*Vrtinčenje*
$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

*Izvornost* $\mathrm{div}\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

*Pravokotni*
$\vec{1}_x \perp \vec{1}_y \perp \vec{1}_z \perp \vec{1}_x$

*Smerni odvod* $\mathrm{grad}\,T = \nabla T = \vec{1}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial T}{\partial z}$

Kartezični koordinatni sistem ima tri ravne koordinatne osi. Vse tri koordinatne osi imajo merske enote razdalje, običajno so to metri $[m]$ . Odvajanje po koordinatah torej pomeni neposredno odvajanje po razdaljah. Spoštovanje vrstnega reda pisanja koordinat $(x, y, z)$ ohranja desnosučnost.

Posebnost kartezičnega koordinatnega sistema so konstantni enotni smerni vektorji $\vec{1}_x$ , $\vec{1}_y$ in $\vec{1}_z$ , ki so neodvisni od položaja v prostoru $\vec{r}=(x, y, z)$ . Pri računanju odvodov se smerniki $\vec{1}_x$ , $\vec{1}_y$ in $\vec{1}_z$ kartezičnega koordinatnega sistema obnašajo kot konstante, kar znatno poenostavi računanje.

Odvajanje vektorskih in skalarnih funkcij v prostoru lahko zapišemo z operatorjem $\nabla$ (nabla), ki ima v kartezičnih koordinatah preprost zapis. Vrtinčenje vektorskega polja tedaj računamo kot vektorski produkt $\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r})=\nabla\times\vec{F}(\vec{r})$ , izvornost vektorskega polja kot skalarni produkt $\operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})=\nabla\cdot\vec{F}(\vec{r})$ in smerni odvod skalarnega polja kot produkt vektorja odvajanja s skalarjem $\operatorname{grad}T(\vec{r})=\nabla T(\vec{r})$ .

Kartezični koordinatni sistem uporabimo tudi za opis oziroma definicijo vseh drugih 3D, pravokotnih in desnosučnih koordinatnih sistemov. Kartezični koordinatni sistem pogosto uporabljamo kot vmesno stopnjo pri pretvorbi poljubnega koordinatnega sistema v drugačen poljubni koordinatni sistem. Končno, ker so smerniki $\vec{1}_x$ , $\vec{1}_y$ in $\vec{1}_z$ kartezičnega koordinatnega sistema konstantni vektorji, z njihovo pomočjo najbolj preprosto računamo odvode smernikov drugih koordinatnih sistemov.

Kartezični koordinatni sistem žal ni najprimernejši za opis točkastih virov valovanja, na primer katerekoli antene na velikih razdaljah $r\gg d$ . Za takšno nalogo je najprimernejši krogelni koordinatni sistem. Najbolj znan krogelni koordinatni sistem je zemljepisni koordinatni sistem. Koordinate zemljepisna dolžina $\lambda[°]$ , zemljepisna širina $\phi[°]$ in nadmorska višina $h[m]$ tvorijo v zaporedju $(\lambda, \phi, h)$ 3D, pravokotni in desnosučni koordinatni sistem.

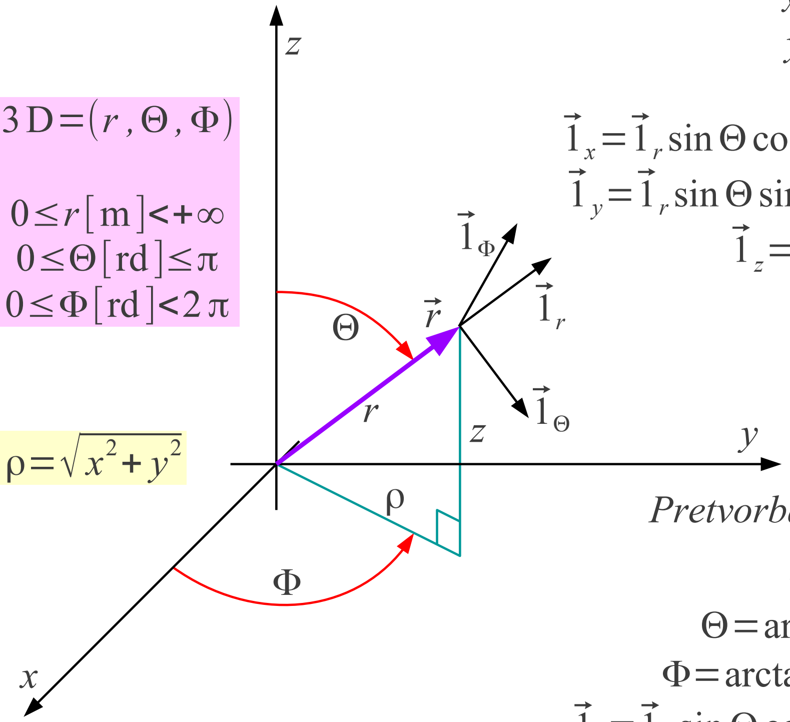
Zemljepisni koordinatni sistem ima nekaj pomanjkljivosti. Zapis koordinat v stopinjah $[°]$ prinaša nerodnosti pri odvajanju kotnih funkcij. Nadmorski višini je treba vsaj prišteti polmer Zemlje, če slednjo smemo poenostaviti kot kroglo s polmerom $R_Z\approx 6378\mathrm{km}$ .

Pri antenah pogosteje uporabljamo krogelni koordinatni sistem $(r, \Theta, \Phi)$ , kjer je $r[m]$ oddaljenost od izhodišča v enotah razdalje (metri), $\Theta[\mathrm{rd}]$ je polarna razdalja (kot) v radianih in $\Phi[\mathrm{rd}]$ je zemljepisna dolžina (kot) v radianih. Krogelne koordinate, pisane v zaporedju $(r, \Theta, \Phi)$, tvorijo 3D, pravokotni in desnosučni koordinatni sistem:

Krogelne koordinate (tečaj z)

$$3\,\mathrm{D} = (r, \Theta, \Phi)$$

$$0 \le r[\mathrm{m}] < +\infty$$
$$0 \le \Theta[\mathrm{rd}] \le \pi$$
$$0 \le \Phi[\mathrm{rd}] < 2\pi$$




$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathit{Pravokotni} \quad \vec{1}_r \perp \vec{1}_\Theta \perp \vec{1}_\Phi \perp \vec{1}_r$$

$$\mathit{Desnosučni} \quad \vec{1}_r \times \vec{1}_\Theta = \vec{1}_\Phi$$

$$\mathit{Pretvorba} \quad (r, \Theta, \Phi) \rightarrow (x, y, z)$$
$$x = r \sin\Theta \cos\Phi$$
$$y = r \sin\Theta \sin\Phi$$
$$z = r \cos\Theta$$
$$\vec{1}_x = \vec{1}_r \sin\Theta \cos\Phi + \vec{1}_\Theta \cos\Theta \cos\Phi - \vec{1}_\Phi \sin\Phi$$
$$\vec{1}_y = \vec{1}_r \sin\Theta \sin\Phi + \vec{1}_\Theta \cos\Theta \sin\Phi + \vec{1}_\Phi \cos\Phi$$
$$\vec{1}_z = \vec{1}_r \cos\Theta - \vec{1}_\Theta \sin\Theta$$

$$0 \le \Theta \le \pi \rightarrow \sin\Theta \ge 0$$

$$\mathit{Pretvorba} \quad (x, y, z) \rightarrow (r, \Theta, \Phi)$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\Theta = \arccos\left(z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$
$$\Phi = \arctan(y/x) \quad (\mathit{kvadrant\,?})$$
$$\vec{1}_r = \vec{1}_x \sin\Theta \cos\Phi + \vec{1}_y \sin\Theta \sin\Phi + \vec{1}_z \cos\Theta$$
$$\vec{1}_\Theta = \vec{1}_x \cos\Theta \cos\Phi + \vec{1}_y \cos\Theta \sin\Phi - \vec{1}_z \sin\Theta$$
$$\vec{1}_\Phi = -\vec{1}_x \sin\Phi + \vec{1}_y \cos\Phi$$

Severni tečaj $\Theta = 0$ krogelnega koordinatnega sistema najpogosteje izberemo v smeri osi $+z$ kartezičnega koordinatnega sistema. Ekvatorialna ravnina krogelnega koordinatnega sistema $\Theta = \pi/2$ tedaj ustreza ravnini $xy$ oziroma $z = 0$ kartezičnega koordinatnega sistema. Oddaljenost od izhodišča $r \ge 0$ vzamemo vedno pozitivno ali enako nič. Polarna razdalja se giblje v mejah $0 \le \Theta \le \pi$ od severnega do južnega tečaja.

Vsi krogelni koordinatni sistemi so krivočrtni koordinatni sistemi. Poldnevniki in vzporedniki so krožni loki. Vsi trije smerni vektorji $\vec{1}_r$, $\vec{1}_\Theta$ in $\vec{1}_\Phi$ pri premikanju vzdolž poldnevnikov oziroma vzporednikov spreminjajo svojo smer! Smernike krogelnega koordinatnega sistema $\vec{1}_r$, $\vec{1}_\Theta$ in $\vec{1}_\Phi$ kot tudi obojestransko povezavo s smerniki kartezičnega koordinatnega sistema $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ in $\vec{1}_z$ je zato smiselno zapisati s kotnimi funkcijami polarne razdalje $\Theta[\mathrm{rd}]$ in zemljepisne dolžine $\Phi[\mathrm{rd}]$.

Ker smerniki krogelnega koordinatnega sistema $\vec{1}_r$ , $\vec{1}_\Theta$ in $\vec{1}_\Phi$ niso konstante, operator odvajanja $\nabla$ nima preprostega zapisa v krogelnih koordinatah. Poleg tega $\nabla$ odvaja po razdaljah, koordinati $\Theta[\mathrm{rd}]$ in $\Phi[\mathrm{rd}]$ pa nimata merskih enot razdalje! Pri izračunu odvodov v poljubnem krivočrtnem koordinatnem sistemu $(q_1, q_2, q_3)$ si pomagamo z Laméjevimi koeficienti oziroma faktorji skale $h_1$ , $h_2$ in $h_3$ :

$$\textit{Laméjevi koeficienti}\ (q_1, q_2, q_3) \qquad h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \qquad i = 1,2,3$$

$$\textit{Krogelne koordinate}\ (r, \Theta, \Phi) \qquad h_r = 1 \quad h_\Theta = r[\mathrm{m/rd}] \quad h_\Phi = r\sin\Theta[\mathrm{m/rd}]$$

*Smerni odvod*

$$\mathrm{grad}\, T = \vec{1}_{q1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T}{\partial q_1} + \vec{1}_{q2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T}{\partial q_2} + \vec{1}_{q3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T}{\partial q_3} = \vec{1}_r\frac{\partial T}{\partial r} + \vec{1}_\Theta\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \Theta} + \vec{1}_\Phi\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial T}{\partial \Phi}$$

$$\textit{Izvornost} \qquad \mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_2 h_3 F_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 F_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 F_3)}{\partial q_3}\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial(\sin\Theta\, F_\Theta)}{\partial \Theta} + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial F_\Phi}{\partial \Phi}$$

*Vrtinčenje*

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{1}_{q1} & h_2\vec{1}_{q2} & h_3\vec{1}_{q3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\Theta}\begin{vmatrix} \vec{1}_r & r\vec{1}_\Theta & r\sin\Theta\,\vec{1}_\Phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ F_r & r F_\Theta & r\sin\Theta\, F_\Phi \end{vmatrix}$$

Odvajanje v krogelnih koordinatah

V krogelnih koordinatah $(r, \Theta, \Phi)$ je samo $h_r = 1$ neimenovana konstanta. Ostala dva Laméjeva koeficienta $h_\Theta$ in $h_\Phi$ sta funkciji koordinat in imata merske enote $[\mathrm{m/rd}]$ , da pretvarjata radiane v metre.

Pretvorba merskih enot zadošča pri izračunu smernega odvoda. Pri izračunu izvornosti moramo odvajati tudi spreminjanje ploskvic v krivočrtnih koordinatah, pri izračunu vrtinčenja pa spreminjanje razdalj v krivočrtnih koordinatah. Pri izračunu izvornosti in vrtinčenja v krogelnih koordinatah zato odvajamo tudi Laméjeve koeficiente.

Pri praktični uporabi krogelnih koordinat skušamo zasukati koordinatni sistem tako, da je naloga rotacijsko simetrična okoli osi $z$ oziroma neodvisna od zemljepisne dolžine $\partial/\partial\Phi=0$ . Računanje se v tem primeru poenostavi v 2D nalogo koordinat $(r,\Theta)$ . Rotacijska simetrija pri tem ne preprečuje, da vektorske veličine nimajo komponent vseh treh smereh $\vec{1}_r$ , $\vec{1}_\Theta$ in $\vec{1}_\Phi$ , le odvisnosti od tretje koordinate ni.

Inženir rešuje komplicirano nalogo tako, da jo razstavi v več manjših in preprostejših nalog. Rešitve slednjih na koncu sestavi v skupni rezultat. Večina preprostih nalog iz anten ima rotacijsko simetrijo, kar upoštevamo pri izbiri tečaja krogelnega koordinatnega sistema. Izbrani krogelni koordinatni sistem žal največkrat ne ustreza končnemu skupnemu rezultatu, ki mogoče nima nobene rotacijske simetrije.

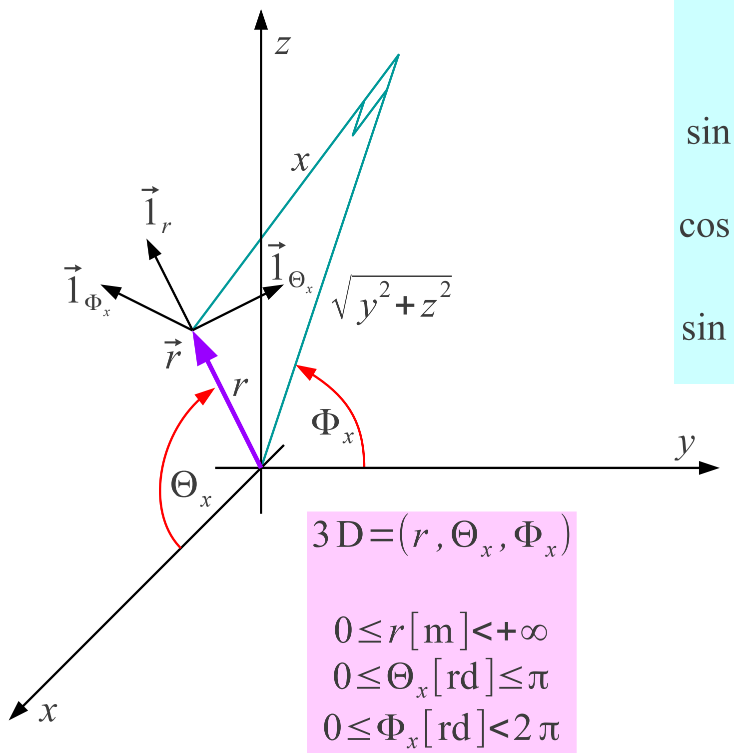
Reševanje sestavljenih nalog iz anten zahteva uporabo več različnih krogelnih koordinatnih sistemov, ki imajo večinoma sicer vsi skupno izhodišče, ampak različne tečaje. Tehnično zanimivi zgledi imajo osi rotacijske simetrije postavljene pod pravim kotom. Računanje torej potrebuje do tri različne krogelne koordinatne sisteme, ki imajo tečaje v smeri osi $x$ oziroma $y$ oziroma $z$ .

Postopek reševanja opisanih nalog je naslednji. Krogelni koordinatni sistem $(r,\Theta,\Phi)$ najprej zasukamo tako, da tečaj ustreza osi simetrije preproste antene. Preprosto nalogo rešimo v tem koordinatnem sistemu. Anteno nato zasukamo tako, kot to zahteva končna rešitev sestavljene naloge. Izračunano rešitev pretvorimo iz začasnih koordinat v dokončne koordinate.

Za reševanje praktičnih antenskih nalog je smiselno definirati dva nova krogelna koordinatna sistema $(r,\Theta_x,\Phi_x)$ in $(r,\Theta_y,\Phi_y)$ s severnim tečajem v smeri osi $x$ oziroma $y$ . V kartezičnih koordinatah opišemo isto s cikličnim zamikom koordinat $(x,y,z)$ v $(y,z,x)$ oziroma v $(z,x,y)$ , kar ohranja desnosučnost!

Krogelni koordinatni sistem $(r,\Theta_x,\Phi_x)$ ima severni tečaj v smeri osi $+x$ in ekvatorialno ravnino $yz$ oziroma $x=0$ . Polarno razdaljo $\Theta_x[\mathrm{rd}]$ merimo od osi $+x$ do smeri $\vec{r}$ , zemljepisno dolžino $\Phi_x[\mathrm{rd}]$ pa od osi $+y$ do projekcije $\vec{r}$ na ravnino $yz$ :

## Krogelne koordinate - tečaj x




$$3\,\mathrm{D}=(r,\Theta_x,\Phi_x)$$

$$0\leq r[\mathrm{m}]<+\infty$$
$$0\leq\Theta_x[\mathrm{rd}]\leq\pi$$
$$0\leq\Phi_x[\mathrm{rd}]<2\pi$$

*Pretvorba* $(r,\Theta_x,\Phi_x)\to(r,\Theta,\Phi)$

$$\cos\Theta_x=\frac{x}{r}=\sin\Theta\cos\Phi$$

$$\sin\Theta_x=\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{r}=\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}$$

$$\cos\Phi_x=\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{\sin\Theta\sin\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}}$$

$$\sin\Phi_x=\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{\cos\Theta}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}}$$

*Smerniki*

$$\vec{1}_r=\vec{1}_r$$

$$\vec{1}_{\Theta_x}=\frac{-\vec{1}_\Theta\cos\Theta\cos\Phi+\vec{1}_\Phi\sin\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}}$$

$$\vec{1}_{\Phi_x}=\frac{-\vec{1}_\Theta\sin\Phi-\vec{1}_\Phi\cos\Theta\cos\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}}$$

$$0\leq\Theta_x\leq\pi\;\rightarrow\;\sin\Theta_x=\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}\geq 0$$

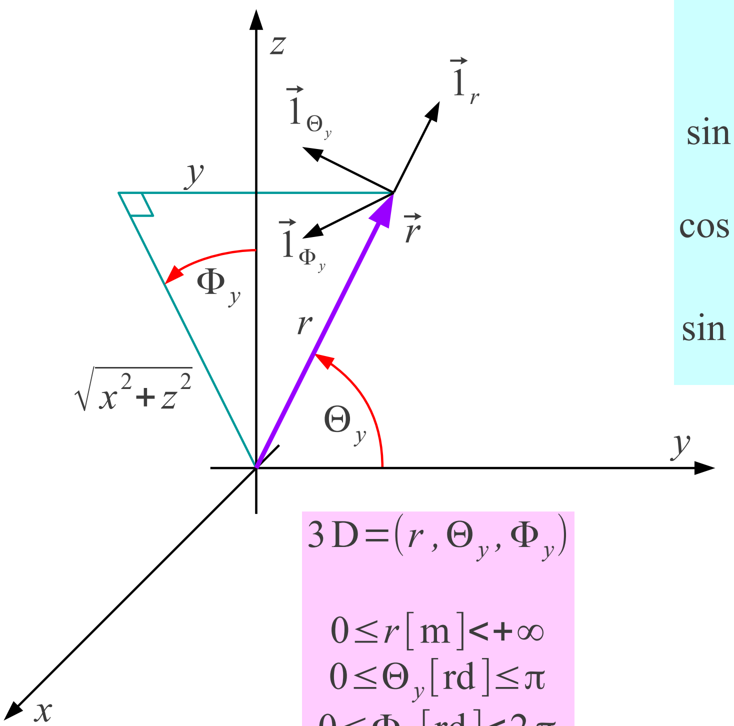
Za koordinate $(r,\Theta_x,\Phi_x)$ veljajo popolnoma enake zahteve kot za običajne krogelne koordinate $(r,\Theta,\Phi)$, le smer tečaja je drugačna. Koordinata $r$ in pripadajoči smernik $\vec{1}_r$ sta popolnoma enaka v vseh krogelnih koordinatnih sistemih s skupnim izhodiščem.

Pretvorba rešitve iz koordinat $(r,\Theta_x,\Phi_x)$ v koordinate $(r,\Theta,\Phi)$ torej zahteva le pretvorbo kotov $\Theta_x$ in $\Phi_x$ ter pripadajočih smernikov $\vec{1}_{\Theta_x}$ in $\vec{1}_{\Phi_x}$ v pripadajoče veličine ciljnega koordinatnega sistema. Ker poznamo oboje-smerno povezavo obeh krogelnih koordinatnih sistemov $(r,\Theta_x,\Phi_x)$ in $(r,\Theta,\Phi)$ s kartezičnim koordinatnim sistemom $(x,y,z)$, koordinate in smernike v vmesnem koraku pretvorimo v pripadajoče kartezične veličine.

Rezultat antenske naloge $(r,\Theta_x,\Phi_x)$ je običajno izražen s kotnimi funkcijami $\sin\Theta_x$, $\cos\Theta_x$, $\sin\Phi_x$ in $\cos\Phi_x$, zato je smiselno izraziti slednje s kotnimi funkcijami $\sin\Theta$, $\cos\Theta$, $\sin\Phi$ in $\cos\Phi$ ciljnih koordinat $(r,\Theta,\Phi)$. Območje krogelnih koordinat zahteva $\sin\Theta_x=\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}\geq 0$, torej predznak korena ni vprašljiv! Podobno je smiselno izraziti smernika $\vec{1}_{\Theta_x}$ in $\vec{1}_{\Phi_x}$ s smernikoma $\vec{1}_{\Theta}$ in $\vec{1}_{\Phi}$, saj ležijo vsi štirje omenjeni smerniki v isti ravnini, pravokotni na smer $\vec{1}_r$ !

Krogelni koordinatni sistem $(r, \Theta_y, \Phi_y)$ ima severni tečaj v smeri osi $+y$ in ekvatorialno ravnino $xz$ oziroma $y=0$. Polarno razdaljo $\Theta_y[\mathrm{rd}]$ merimo od osi $+y$ do smeri $\vec{r}$, zemljepisno dolžino $\Phi_y[\mathrm{rd}]$ pa od osi $+z$ do projekcije $\vec{r}$ na ravnino $xz$ :

Krogelne koordinate - tečaj y




*Pretvorba* $(r, \Theta_y, \Phi_y) \rightarrow (r, \Theta, \Phi)$

$$\cos\Theta_y = \frac{y}{r} = \sin\Theta\sin\Phi$$

$$\sin\Theta_y = \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{r} = \sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\Phi}$$

$$\cos\Phi_y = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{\cos\Theta}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\Phi}}$$

$$\sin\Phi_y = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{\sin\Theta\cos\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\Phi}}$$

$$3\mathrm{D} = (r, \Theta_y, \Phi_y)$$

$$0 \le r[\mathrm{m}] < +\infty$$
$$0 \le \Theta_y[\mathrm{rd}] \le \pi$$
$$0 \le \Phi_y[\mathrm{rd}] < 2\pi$$

*Smerniki*

$$\vec{1}_r = \vec{1}_r$$

$$\vec{1}_{\Theta_y} = \frac{-\vec{1}_{\Theta}\cos\Theta\sin\Phi - \vec{1}_{\Phi}\cos\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\Phi}}$$

$$\vec{1}_{\Phi_y} = \frac{\vec{1}_{\Theta}\cos\Phi - \vec{1}_{\Phi}\cos\Theta\sin\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\Phi}}$$

$$0 \le \Theta_y \le \pi \rightarrow \sin\Theta_y = \sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\Phi} \ge 0$$

Koordinata $r$ in pripadajoči smernik $\vec{1}_r$ sta popolnoma enaka v vseh krogelnih koordinatnih sistemih s skupnim izhodiščem $(r, \Theta_x, \Phi_x)$, $(r, \Theta_y, \Phi_y)$ in $(r, \Theta, \Phi)$. Kotne funkcije $\sin\Theta_y$, $\cos\Theta_y$, $\sin\Phi_y$ in $\cos\Phi_y$ koordinat $(r, \Theta_y, \Phi_y)$ je smiselno izraziti s kotnimi funkcijami $\sin\Theta$, $\cos\Theta$, $\sin\Phi$ in $\cos\Phi$ ciljnih koordinat $(r, \Theta, \Phi)$.

Območje krogelnih koordinat zahteva $\sin\Theta_y = \sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\Phi} \ge 0$, torej predznak korena ni vprašljiv! Podobno je smiselno izraziti smernika $\vec{1}_{\Theta_y}$ in $\vec{1}_{\Phi_y}$ s smernikoma $\vec{1}_{\Theta}$ in $\vec{1}_{\Phi}$, saj ležijo vsi štirje omenjeni smerniki v isti ravnini, pravokotni na smer $\vec{1}_r$ !

Končno, ko reševanje naloge zahteva dva različna krogelna koordinatna sistema z različnima izhodiščema, je edina smotrna pot preračunavanje preko vmesnih kartezičnih koordinat $(x, y, z)$ .

* * * * *