2. Krogelne koordinate

Večina nalog iz anten in razširjanje valov zahteva obravnavo v treh dimenzijah prostora. Tako skalarne kot vektorske veličine so funkcije časa in vseh treh dimenzij prostora. Ozkopasovne signale $B \ll f$ radia največkrat smemo v izračunih ponazoriti s harmonskim signalom ene same krožne frekvence $\omega = 2\pi f$, kar poenostavi časovne odvode v $\partial / \partial t = j\omega$.

Računanje s skalarnimi in vektorskimi funkcijami treh dimenzij prostora se da poenostaviti s koordinatnim sistemom, ki ima naslednje lastnosti:
1) tri dimenzije (3D),
2) pravokotnost med koordinatnimi osmi (pravokotni) in
3) vgrajeno pravilo desnega vijaka (desnosučni).
Od primernih koordinatnih sistemov je najpreprostejši kartezični koordinatni sistem:

Kartezične koordinate

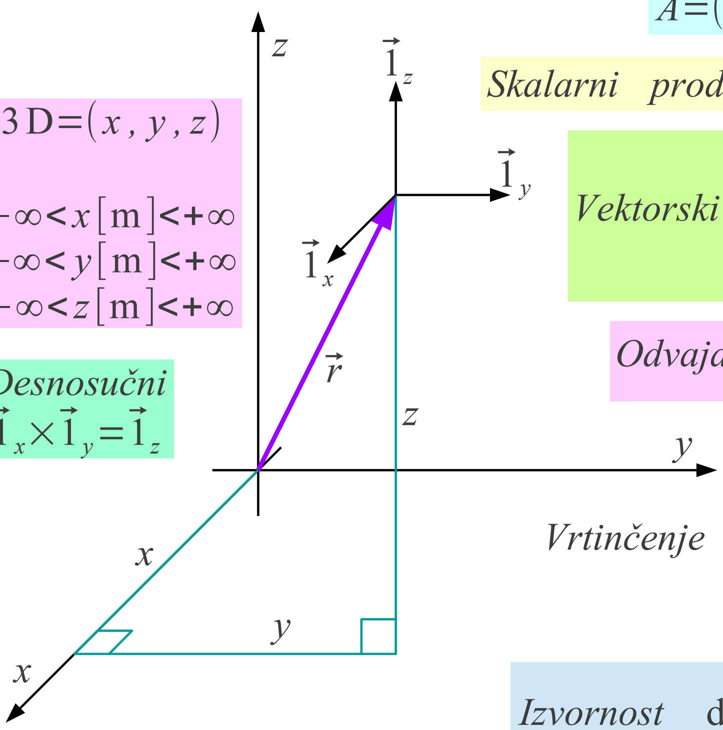
Komponente
$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = \vec{1}_x A_x + \vec{1}_y A_y + \vec{1}_z A_z$$

Skalarni produkt $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$$3\mathrm{D} = (x, y, z)$$

$$-\infty < x[\mathrm{m}] < +\infty$$
$$-\infty < y[\mathrm{m}] < +\infty$$
$$-\infty < z[\mathrm{m}] < +\infty$$

Vektorski produkt $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$



Odvajanje $\nabla = \vec{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z}$

Desnosučni
$$\vec{1}_x \times \vec{1}_y = \vec{1}_z$$

Vrtinčenje $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

Izvornost $\mathrm{div}\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

Pravokotni
$$\vec{1}_x \perp \vec{1}_y \perp \vec{1}_z \perp \vec{1}_x$$

Smerni odvod $\mathrm{grad}\,T = \nabla T = \vec{1}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial T}{\partial z}$

Kartezični koordinatni sistem ima tri ravne koordinatne osi. Vse tri koordinatne osi imajo merske enote razdalje, običajno so to metri $[m]$. Odvajanje po koordinatah torej pomeni neposredno odvajanje po razdaljah. Spoštovanje vrstnega reda pisanja koordinat (x, y, z) ohranja desnosučnost.

Posebnost kartezičnega koordinatnega sistema so konstantni enotni smerni vektorji $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ in $\vec{1}_z$, ki so neodvisni od položaja v prostoru $\vec{r}=(x, y, z)$. Pri računanju odvodov se smerniki $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ in $\vec{1}_z$ kartezičnega koordinatnega sistema obnašajo kot konstante, kar znatno poenostavi računanje.

Odvajanje vektorskih in skalarnih funkcij v prostoru lahko zapišemo z operaterjem ∇ , ki ima v kartezičnih koordinatah preprost zapis. Vrtinčenje vektorskega polja tedaj računamo kot $\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r})=\nabla\times\vec{F}(\vec{r})$, izvornost vektorskega polja kot $\operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})=\nabla\cdot\vec{F}(\vec{r})$ in smerni odvod skalarnega polja kot $\operatorname{grad}T(\vec{r})=\nabla T(\vec{r})$.

Kartezični koordinatni sistem uporabimo tudi za opis oziroma definicijo vseh drugih 3D, pravokotnih in desnosučnih koordinatnih sistemov. kartezični koordinatni sistem pogosto uporabljamo kot vmesno stopnjo pri pretvorbi poljubnega koordinatnega sistema v drugačen poljubni koordinatni sistem. Končno, ker so smerniki $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ in $\vec{1}_z$ kartezičnega koordinatnega sistema konstantni vektorji, z njihovo pomočjo najbolj preprosto računamo odvode smernikov drugih koordinatnih sistemov.

Kartezični koordinatni sistem žal ni najprimernejši za opis točkastih virov valovanja, na primer katerekoli antene na velikih razdaljah $r \gg d$. Za takšno nalogo je primernejši krogelni koordinatni sistem. Najbolj znan krogelni koordinatni sistem je zemljepisni koordinatni sistem. Koordinate zemljepisna dolžina $\lambda[°]$, zemljepisna širina $\phi[°]$ in nadmorska višina $h[m]$ tvorijo v zaporedju (λ, ϕ, h) 3D, pravokotni in desnosučni koordinatni sistem.

Zemljepisni koordinatni sistem ima nekaj pomanjkljivosti. Zapis koordinat v stopinjah $[°]$ prinaša nerodnosti pri odvajanju kotnih funkcij. Nadmorski višini je treba vsaj prišteti polmer Zemlje, če slednjo smemo poenostaviti kot kroglo s polmerom $R_Z \approx 6378\mathrm{km}$.

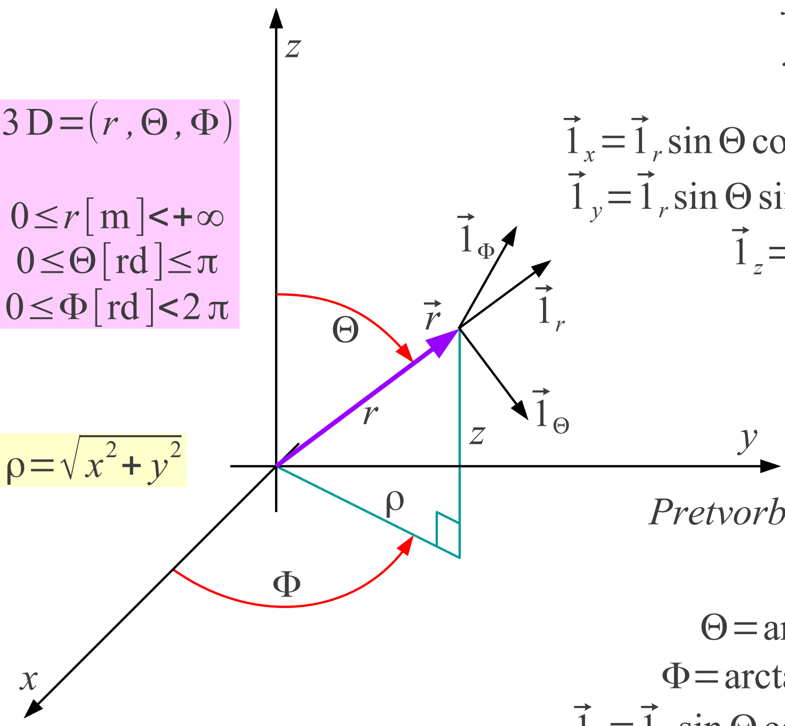
Pri antenah pogosteje uporabljamo krogelni koordinatni sistem (r,Θ,Φ) , kjer je $r[m]$ oddaljenost od izhodišča v enotah razdalje (metri), $\Theta[\mathrm{rd}]$ je polarna razdalja (kot) v radianih in $\Phi[\mathrm{rd}]$ je zemljepisna dolžina (kot) v radianih. Krogelne koordinate pisane v zaporedju (r,Θ,Φ) tvorijo 3D, pravokotni in desnosučni koordinatni sistem:

Krogelne koordinate (tečaj z)

$$3\mathrm{D}=(r,\Theta,\Phi)$$

$$0\le r[\mathrm{m}]<+\infty$$
$$0\le\Theta[\mathrm{rd}]\le\pi$$
$$0\le\Phi[\mathrm{rd}]<2\pi$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$



Pravokotni $\vec{1}_r\perp\vec{1}_\Theta\perp\vec{1}_\Phi\perp\vec{1}_r$

Desnosučni $\vec{1}_r\times\vec{1}_\Theta=\vec{1}_\Phi$

Pretvorba $(r,\Theta,\Phi)\rightarrow(x,y,z)$

$$x=r\sin\Theta\cos\Phi$$
$$y=r\sin\Theta\sin\Phi$$
$$z=r\cos\Theta$$
$$\vec{1}_x=\vec{1}_r\sin\Theta\cos\Phi+\vec{1}_\Theta\cos\Theta\cos\Phi-\vec{1}_\Phi\sin\Phi$$
$$\vec{1}_y=\vec{1}_r\sin\Theta\sin\Phi+\vec{1}_\Theta\cos\Theta\sin\Phi+\vec{1}_\Phi\cos\Phi$$
$$\vec{1}_z=\vec{1}_r\cos\Theta-\vec{1}_\Theta\sin\Theta$$

$$0\le\Theta\le\pi\ \rightarrow\ \sin\Theta\ge0$$

Pretvorba $(x,y,z)\rightarrow(r,\Theta,\Phi)$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\Theta=\arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$
$$\Phi=\arctan(y/x)\quad(\mathit{kvadrant\ ?})$$
$$\vec{1}_r=\vec{1}_x\sin\Theta\cos\Phi+\vec{1}_y\sin\Theta\sin\Phi+\vec{1}_z\cos\Theta$$
$$\vec{1}_\Theta=\vec{1}_x\cos\Theta\cos\Phi+\vec{1}_y\cos\Theta\sin\Phi-\vec{1}_z\sin\Theta$$
$$\vec{1}_\Phi=-\vec{1}_x\sin\Phi+\vec{1}_y\cos\Phi$$

Severni tečaj $\Theta=0$ krogelnega koordinatnega sistema najpogosteje izberemo v smeri osi z kartezičnega koordinatnega sistema. Ekvatorialna ravnina krogelnega koordinatnega sistema $\Theta=\pi/2$ tedaj ustreza ravnini xy oziroma $z=0$ kartezičnega koordinatnega sistema. Oddaljenost od izhodišča $r\ge0$ vzamemo vedno pozitivno ali enako nič, polarna razdalja pa se giblje v mejah $0\le\Theta\le\pi$ od severnega do južnega tečaja.

Vsi krogelni koordinatni sistemi so krivočrtni koordinatni sistemi. Poldnevniki in vzporedniki so krožni loki. Vsi trije smerni vektorji $\vec{1}_r$, $\vec{1}_\Theta$ in $\vec{1}_\Phi$ pri premikanju vzdolž poldnevnikov oziroma vzporednikov spreminjajo svojo smer! Smernike krogelnega koordinatnega sistema $\vec{1}_r$, $\vec{1}_\Theta$ in $\vec{1}_\Phi$ kot tudi obojestransko povezavo s smerniki kartezičnega koordinatnega sistema $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ in $\vec{1}_z$ je zato smiselno zapisati s kotnimi funkcijami polarne razdalje Θ in zemljepisne dolžine Φ .

Laméjevi koeficienti (q_1, q_2, q_3): $\quad h_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \qquad i=1,2,3$

Krogelne koordinate (r, Θ, Φ): $\quad h_r=1 \qquad h_\Theta=r \qquad h_\Phi=r\sin\Theta$

Smerni odvod

$$\operatorname{grad} T=\vec{1}_{q1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}+\vec{1}_{q2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}+\vec{1}_{q3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T}{\partial q_3}=\vec{1}_r\frac{\partial T}{\partial r}+\vec{1}_\Theta\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \Theta}+\vec{1}_\Phi\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial T}{\partial \Phi}$$

Izvornost

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3F_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial(h_1h_3F_2)}{\partial q_2}+\frac{\partial(h_1h_2F_3)}{\partial q_3}\right]=$$

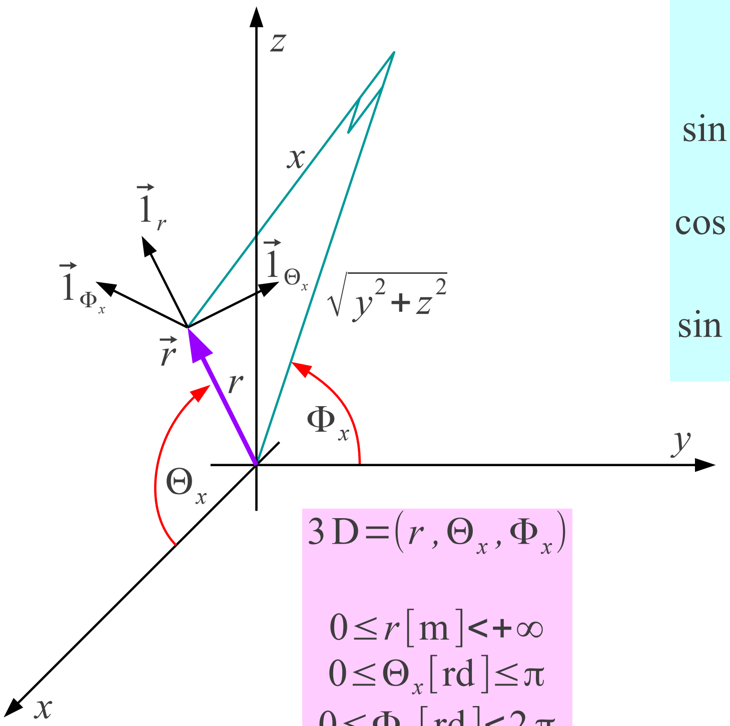
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial(\sin\Theta F_\Theta)}{\partial\Theta}+\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial F_\Phi}{\partial\Phi}$$

Vrtinčenje

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{1}_{q1} & h_2\vec{1}_{q2} & h_3\vec{1}_{q3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{r^2\sin\Theta}\begin{vmatrix} \vec{1}_r & r\vec{1}_\Theta & r\sin\Theta\,\vec{1}_\Phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\Theta} & \frac{\partial}{\partial\Phi} \\ F_r & rF_\Theta & r\sin\Theta\,F_\Phi \end{vmatrix}$$

Odvajanje v krogelnih koordinatah

Krogelne koordinate - tečaj x



$$3\,\mathrm{D}=(r,\Theta_x,\Phi_x)$$

$$0\le r[\mathrm{m}]<+\infty$$
$$0\le\Theta_x[\mathrm{rd}]\le\pi$$
$$0\le\Phi_x[\mathrm{rd}]<2\pi$$

Pretvorba $(r,\Theta_x,\Phi_x)\to(r,\Theta,\Phi)$

$$\cos\Theta_x=\frac{x}{r}=\sin\Theta\cos\Phi$$

$$\sin\Theta_x=\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{r}=\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}$$

$$\cos\Phi_x=\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{\sin\Theta\sin\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}}$$

$$\sin\Phi_x=\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{\cos\Theta}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}}$$

Smerniki

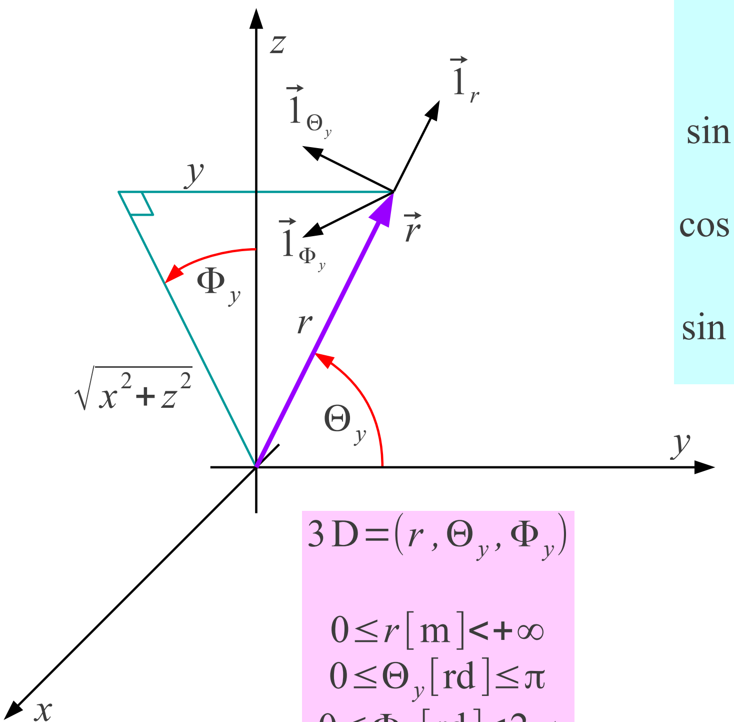
$$\vec{1}_r=\vec{1}_r$$

$$\vec{1}_{\Theta_x}=\frac{-\vec{1}_\Theta\cos\Theta\cos\Phi+\vec{1}_\Phi\sin\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}}$$

$$\vec{1}_{\Phi_x}=\frac{-\vec{1}_\Theta\sin\Phi-\vec{1}_\Phi\cos\Theta\cos\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}}$$

$$0\le\Theta_x\le\pi\ \rightarrow\ \sin\Theta_x=\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\Phi}\ge0$$

Krogelne koordinate - tečaj y



Pretvorba $\quad (r, \Theta_y, \Phi_y) \rightarrow (r, \Theta, \Phi)$

$$\cos\Theta_y = \frac{y}{r} = \sin\Theta \sin\Phi$$

$$\sin\Theta_y = \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{r} = \sqrt{1-\sin^2\Theta \sin^2\Phi}$$

$$\cos\Phi_y = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{\cos\Theta}{\sqrt{1-\sin^2\Theta \sin^2\Phi}}$$

$$\sin\Phi_y = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{\sin\Theta\cos\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta \sin^2\Phi}}$$

$$3\,\mathrm{D} = (r, \Theta_y, \Phi_y)$$

$$0 \le r\,[\mathrm{m}] < +\infty$$
$$0 \le \Theta_y\,[\mathrm{rd}] \le \pi$$
$$0 \le \Phi_y\,[\mathrm{rd}] < 2\pi$$

Smerniki

$$\vec{1}_r = \vec{1}_r$$

$$\vec{1}_{\Theta_y} = \frac{-\vec{1}_\Theta \cos\Theta\sin\Phi - \vec{1}_\Phi \cos\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\Phi}}$$

$$\vec{1}_{\Phi_y} = \frac{\vec{1}_\Theta \cos\Phi - \vec{1}_\Phi \cos\Theta\sin\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\Phi}}$$

$$0 \le \Theta_y \le \pi \;\rightarrow\; \sin\Theta_y = \sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\Phi} \ge 0$$

* * * * *