Smith-ov diagram

Podobno kot ostale elektrotehnične naloge lahko prenosne vode obravnavamo v časovnem prostoru oziroma v frekvenčnem prostoru. Obravnava voda v frekvenčnem prostoru je povsem smiselna, ko z vodom prenašamo razmeroma ozkopasovne signale s pasovno širino $\Delta f \ll f_0$ dosti manjšo od osrednje frekvence, kar je pogost primer v radijskih oddajnikih in sprejemnikih. Obravnava izgub prenosnega voda je bolj preprosta v frekvenčnem prostoru. Končno nam obravnava v frekvenčnem prostoru prinese nov vpogled v delovanje prenosnega voda, tako v teoriji kot pri praktičnih meritvah.

V frekvenčnem prostoru, bolj točno pri krmiljenju s harmonskim virom ene same frekvence ω , trenutni veličini napetost $u(z,t)$ in tok $i(z,t)$ zamenjata kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$. Časovne oziroma frekvenčne odvisnosti posebej ne zapisujemo, saj k vsakemu kazalcu sodi zraven člen $e^{j\omega t}$. Slednjega po dogovoru ne zapisujemo, saj se v linearnih enačbah vedno natančno krajša.

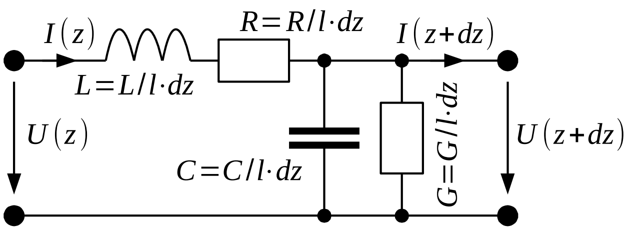
Telegrafsko enačbo prevedemo v frekvenčni prostor tako, da vse odvode po času zapišemo kot $\partial/\partial t = j\omega$. Ostanejo nam seveda odvodi po dolžini z . Kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ sta funkciji ene same spremenljivke z , torej lahko delne odvode $\partial/\partial z = d/dz$ pišemo kot navadne odvode.

Pri reševanju sklopljenih diferencialnih enačb za kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ uporabimo namig iz časovnega prostora, kjer je prostorska odvisnost zelo podobna funkcija časovni odvisnosti. Enačbi poskusimo rešiti v frekvenčnem prostoru tako, da predpostavimo odvisnost od spremenljivke z v obliki $e^{\mp jkz}$. Pri tem je k lahko poljubna konstanta, tudi kompleksna. Konstanta k ima sicer globlji fizikalni pomen, da si zasluži svoje lastno ime: valovno število.

Z uvedbo valovnega števila k pišemo odvode po dolžini z v obliki $d/dz = \mp jk$. Predznak - ali + izbiramo v frekvenčnem prostoru na povsem enak način kot v časovnem prostoru, torej rešitev za napredujoči ali odbiti val. Drugi odvod po spremenljivki z ima vedno enak predznak $d^2/dz^2 = -k^2$ ne glede na to, ali gre za napredujoči oziroma odbiti val.

Z uvedbo valovnega števila k in poenostavitvijo odvodov po dolžini z postane rešitev telegrafske enačbe v frekvenčnem prostoru silno preprosta, ne glede na to, ali upoštevamo izgube ali ne:

Vod z izgubami



$$\frac{dU(z)}{dz}=-j\omega L/l\cdot I(z)-R/l\cdot I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz}=-j\omega C/l\cdot U(z)-G/l\cdot U(z)$$

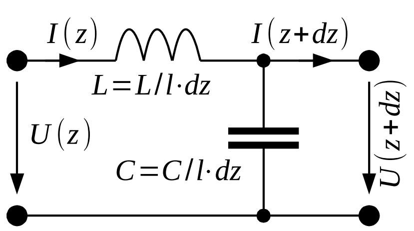
$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}=(j\omega L/l+R/l)(j\omega C/l+G/l)\cdot U(z)=-k^2U(z)$$

$$k=\beta-j\alpha=\sqrt{-(j\omega L/l+R/l)\cdot(j\omega C/l+G/l)}$$

$$U(z)=U_N(0)\cdot e^{-\alpha z}\cdot e^{-j\beta z}+U_O(0)\cdot e^{+\alpha z}\cdot e^{+j\beta z}$$

$$u(z,t)=Re\left[U_N(0)\cdot e^{-\alpha z}\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}+U_O(0)\cdot e^{+\alpha z}\cdot e^{j(\omega t+\beta z)}\right]$$

Brezizgubni vod



$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}=-\omega^2 L/l\cdot C/l\cdot U(z)=-k^2U(z)$$

$$k=\beta=\omega\sqrt{L/l\cdot C/l}=\frac{\omega}{v}$$

$$U(z)=U_N(0)\cdot e^{-j\beta z}+U_O(0)\cdot e^{+j\beta z}$$

$$u(z,t)=Re\left[U_N(0)\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}+U_O(0)\cdot e^{j(\omega t+\beta z)}\right]$$

Napredujoči val

Odbiti (povratni) val

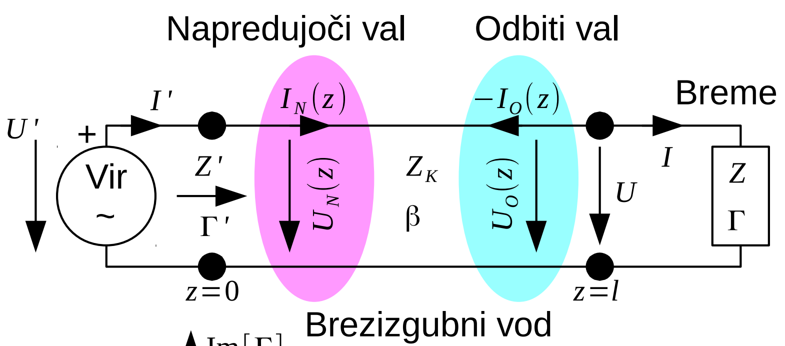
Brezizgubni vod ima povsem realno valovno število k. Valovno število k brezizgubnega voda opisuje samo spreminjanje faze kot funkcija dolžine z. Valovno število je tedaj kar enako fazni konstanti $k=\beta$, ki ima merske enote $\mathrm{rd/m}$ (radiani na meter). Povsem jasno faza napredujočega vala zaostaja z dolžino $e^{-j\beta z}$, faza odbitega vala pa napreduje z dolžino $e^{+j\beta z}$.

Pri krmiljenju s harmonskim virom ene frekvence ω lahko na prenosnem vodu uvedemo pojem valovne dolžine λ. Valovna dolžina je tista razdalja, ko se faza kazalcev napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ ponovi oziroma naredi polni krog $\beta\cdot\lambda=2\pi$. Valovno dolžino lahko izračunamo iz fazne konstante oziroma iz hitrosti valovanja: $\lambda=2\pi/\beta=2\pi v/\omega=v/f$.

Vod z izgubami ima kompleksno valovno število $k=\beta-j\alpha$. Realni del valovnega števila je tudi v tem primeru fazna konstanta $\beta=\mathrm{Re}[k]$, ki ima povsem enak fizikalni pomen kot pri brezizgubnem vodu. Imaginarni del $\alpha=-\mathrm{Im}[k]$ opisuje slabljenje voda na enoto dolžine v logaritemskih merskih enotah $\mathrm{Np/m}$ (Nepri na meter). Slabljenje napredujočega vala v smeri $+z$ zapišemo kot $e^{-\alpha z}$, slabljenje odbitega vala v smeri $-z$ pa kot $e^{+\alpha z}$.

Na povsem enak način kot v časovnem prostoru tudi v frekvenčnem prostoru poimenujemo razmerje med odbitim in napredujočim valom odbojnost $\Gamma = U_O(z)/U_N(z)$. Razmerje dveh kazalcev je seveda kompleksno število, ki je funkcija položaja $\Gamma = \Gamma(z)$. Na brezizgubnem vodu se spreminjata samo fazi napredujočega vala $U_N(z)$ in odbitega vala $U_O(z)$. Absolutna vrednosti kompleksne odbojnosti $|\Gamma(z)|$ oziroma velikost odbojnosti se vzdolž brezizgubnega voda ne spreminja!

Kompleksno odbojnost Γ na priključnih sponkah bremena izračunamo na podoben način kot v časovnem prostoru, le da upornost bremena R v frekvenčnem prostoru nadomesti impedanca bremena Z. Karakteristično impedanco Z_K brezizgubnega voda izračunamo v frekvenčnem prostoru na povsem enak način kot v časovnem prostoru. Povsem jasno se predznak odbojnosti zamenja pri računanju z dualnimi veličinami, admitanco bremena Y in karakteristično admitanco prenosnega voda Y_K:



Brezizgubni vod

$$U_N(z) = U_N(0) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$U_O(z) = U_O(0) \cdot e^{+j\beta z}$$

$$\frac{U_N}{I_N} = \frac{-U_O}{I_O} = Z_K = \sqrt{\frac{L/l}{C/l}}$$

$$\Gamma = \frac{Z - Z_K}{Z + Z_K} = \frac{Y_K - Y}{Y_K + Y} = \frac{U_O(l)}{U_N(l)}$$

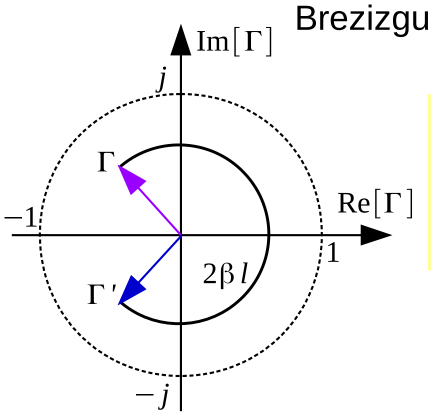
$$\Gamma' = \frac{U_O(0)}{U_N(0)} = \Gamma \cdot e^{-j2\beta l}$$

$$Z' = Z_K \cdot \frac{1 + \Gamma'}{1 - \Gamma'}$$

Pasivno breme

$\mathrm{Re}[Z] = R \geq 0$

$|\Gamma| \leq 1$



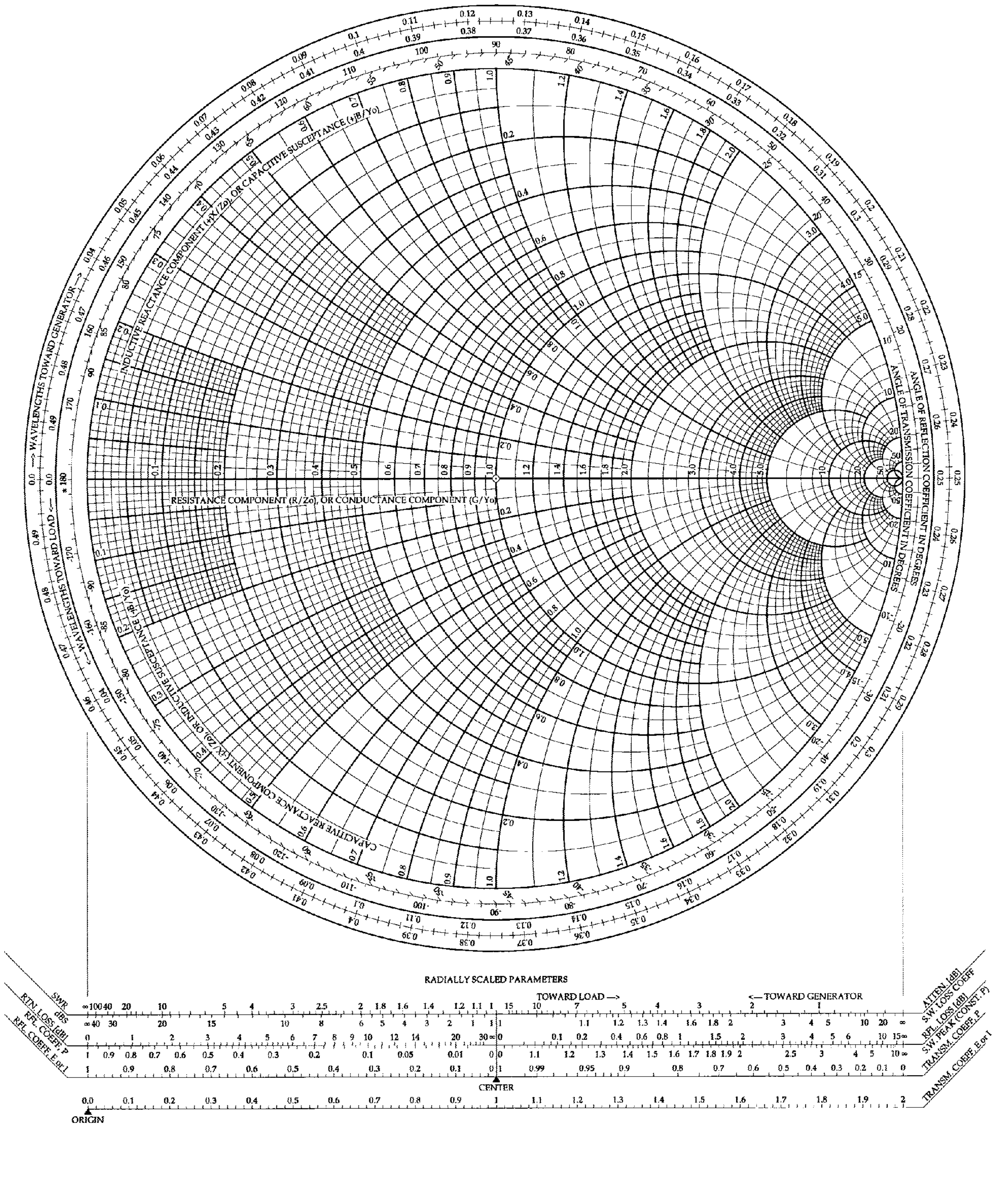
Smith-ov diagram

$$Z' = Z_K \cdot \frac{1 + \frac{Z - Z_K}{Z + Z_K} \cdot e^{-j2\beta l}}{1 - \frac{Z - Z_K}{Z + Z_K} \cdot e^{-j2\beta l}} = Z_K \cdot \frac{Z \cos(\beta l) + jZ_K \sin(\beta l)}{Z_K \cos(\beta l) + jZ \sin(\beta l)}$$

Kakršnokoli pasivno breme $\mathrm{Re}[Z] = R \geq 0$ ima velikost odbojnosti

$|\Gamma| \leq 1$ vedno manjšo ali enako enoti. Odbojnost kakršnegakoli pasivnega bremena lahko torej prikažemo v kompleksnem diagramu znotraj enotnega kroga! Takšen prikaz odbojnosti imenujemo Smith-ov diagram. Na Smith-ovem diagramu imamo pogosto vrisane tudi krivulje za delovni in reaktivni del impedance $Z = R + jX$ oziroma admitance $Y = G + jB$:

Smith-ov diagram:
impedanca/admitanca v merilu odbojnosti

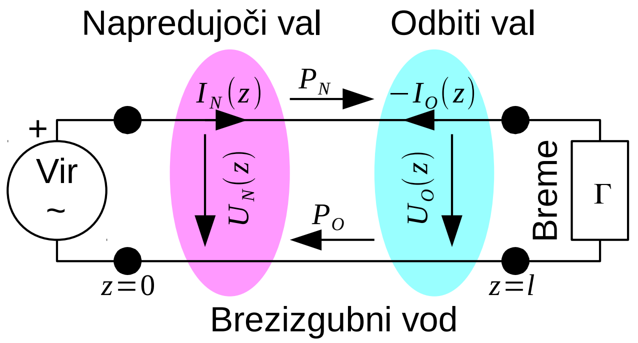


Komplicirani računi izmeničnih vezij postanejo v Smith-ovem diagramu silno preprosti. Če med breme in vir vstavimo prenosni vod z znano karakteristično impedanco Z_K , se vzdolž voda spreminja samo faza odbojnosti. Bolj točno, faza odbojnosti se zavrti za dvojni kot $2\beta l$ faze napredujočega oziroma odbitega vala.

Postopek računanja na brezizgubnem vodu je naslednji. Najprej iz impedance bremena Z določimo odbojnost bremena Γ . Vir vidi preslikano odbojnost $\Gamma'=\Gamma\cdot e^{-j2\beta l}$, kar predstavlja vrtenje kazalca odbojnosti v Smith-ovem diagramu. Končno iz preslikane odbojnosti Γ' izračunamo nazaj preslikano impedanco Z' , ki jo občuti vir.

Celotno preslikavo impedance bremena Z v impedanco Z' , ki jo občuti generator, lahko na brezizgubnem vodu zapišemo s preprosto enačbo. Ko je dolžina voda $l=m\cdot\lambda/2$ celoštevilski mnogokratnik polovice valovne dolžine, se impedanca preslika v povsem enako vrednost $Z'=Z$. Kazalec odbojnosti $\Gamma(z)$ naredi takrat celo število polnih krogov v Smith-ovem diagramu.

Ko je dolžina voda lihi mnogokratnik četrtine valovne dolžine $l=(2m+1)\cdot\lambda/4$, se impedanca invertira $Z'=Z_K^2/Z$. Invertiranje pomeni zasuk za pol kroga v Smith-ovem diagramu. Pri invertiranju se kratki stik $Z=0$ preslika v odprte sponke $Z'=\infty$. Velja tudi obratno, odprte sponke se pri invertiranju z vodom dolžine $\lambda/4$ preslikajo v kratek stik.



$$U(z)=U_N(z)+U_N(z)$$

$$I(z)=I_N(z)+I_O(z)$$

$$\frac{U_N(z)}{I_N(z)}=-\frac{U_O(z)}{I_O(z)}=Z_K=\sqrt{\frac{L/l}{C/l}}$$

$$P=\frac{U(z)\cdot I(z)^*}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left[U_N(0)\cdot e^{-j\beta z}+U_O(0)\cdot e^{+j\beta z}\right]\cdot\left[\frac{U_N(0)^*}{Z_K}\cdot e^{+j\beta z}-\frac{U_O(0)^*}{Z_K}\cdot e^{-j\beta z}\right]$$

$$P=\frac{|U_N|^2}{2Z_K}-\frac{|U_O|^2}{2Z_K}+j\frac{|U_N\cdot U_O|}{Z_K}\cdot\sin(2\beta l+\varphi)$$

$$U_N(0)\cdot U_O(0)^*=|U_N\cdot U_O|\cdot e^{-j\varphi}$$

$$U_O(0)\cdot U_N(0)^*=|U_N\cdot U_O|\cdot e^{+j\varphi}$$

Moči valov

$$P_N=\frac{|U_N|^2}{2Z_K}$$

Napredujoča moč

$$P_O=\frac{|U_O|^2}{2Z_K}$$

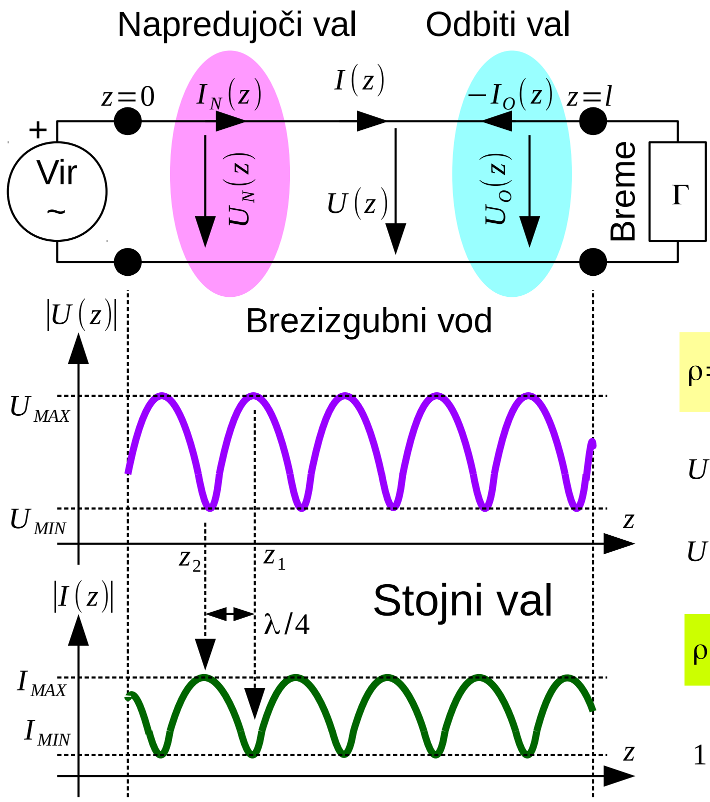
Odbita moč

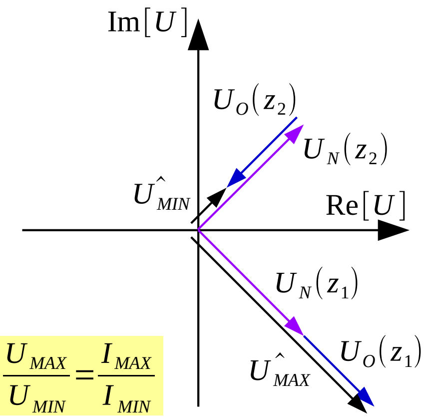
Energija stojnega vala

$$\mathrm{Re}[P]=P_N-P_O$$

$$P_O=|\Gamma|^2\cdot P_N$$

$$\mathrm{Re}[P]=P_N\cdot(1-|\Gamma|^2)$$





$$\rho=\frac{U_{MAX}}{U_{MIN}}=\frac{I_{MAX}}{I_{MIN}}$$

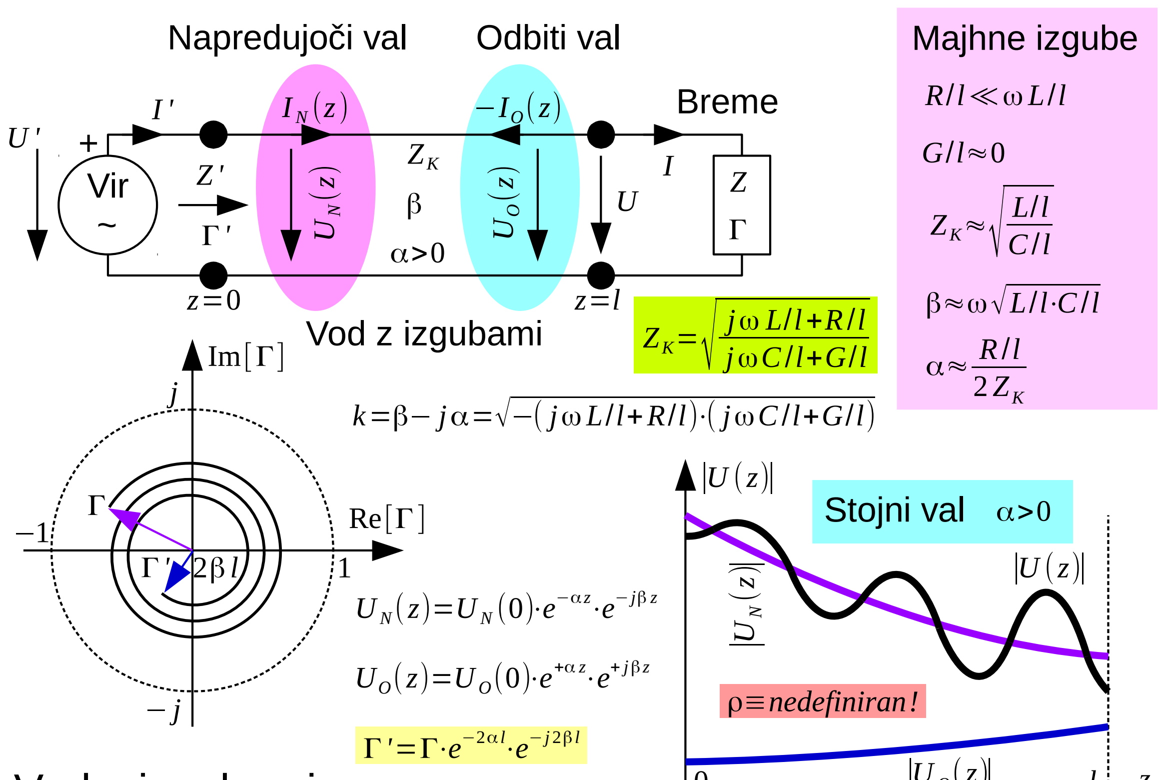
$$U_{MAX}=|U_N|+|U_O|=|U_N|\cdot(1+|\Gamma|)$$

$$U_{MIN}=|U_N|-|U_O|=|U_N|\cdot(1-|\Gamma|)$$

$$\rho=\left|\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}\right| \qquad 1\le\rho\le\infty$$

$$1\ge|\Gamma|=\frac{\rho-1}{\rho+1} \qquad 1\le|\Gamma|=\frac{\rho+1}{\rho-1}$$

V resničnem prenosnem vodu moramo upoštevati tudi izgube. Kovinski vodniki dodajajo od nič različno zaporedno upornost R. Nebrezhibna izolacija dodaja vzporedno prevodnost G. V resničnem vodu oba nista preprosti konstanti, pač pa sta komplicirani funkciji časa $R(t)$ in $G(t)$. Oba je lažje zapisati v frekvenčnem prostoru kot $R(\omega)$ in $G(\omega)$, zato se na opis dogajanja v vodu z izgubami vrnemo kasneje v frekvenčnem prostoru.



Vod z izgubami

Neper

$$a_{Np}=\ln\frac{|U_1|}{|U_2|}$$

$$P=\frac{|U|^2}{2Z_K} \qquad |U|=\sqrt{2Z_K P}$$

$$a_{Np}=\ln\sqrt{\frac{P_1}{P_2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{P_1}{P_2}$$

Prilagoditev
(povratno slabljenje, return loss)

$$\Gamma_{dB}=10\cdot\log|\Gamma|^2=20\cdot\log|\Gamma|$$

Decibel

$$a_{dB}=10\cdot\log\frac{P_1}{P_2}$$

$$a_{dB}=10\cdot\log\left|\frac{U_1}{U_2}\right|^2=20\cdot\log\frac{|U_1|}{|U_2|}$$

$$a_{dB}=\frac{20}{\ln 10}\cdot\ln\frac{|U_1|}{|U_2|}=\frac{20}{2.3026}\cdot a_{Np}$$

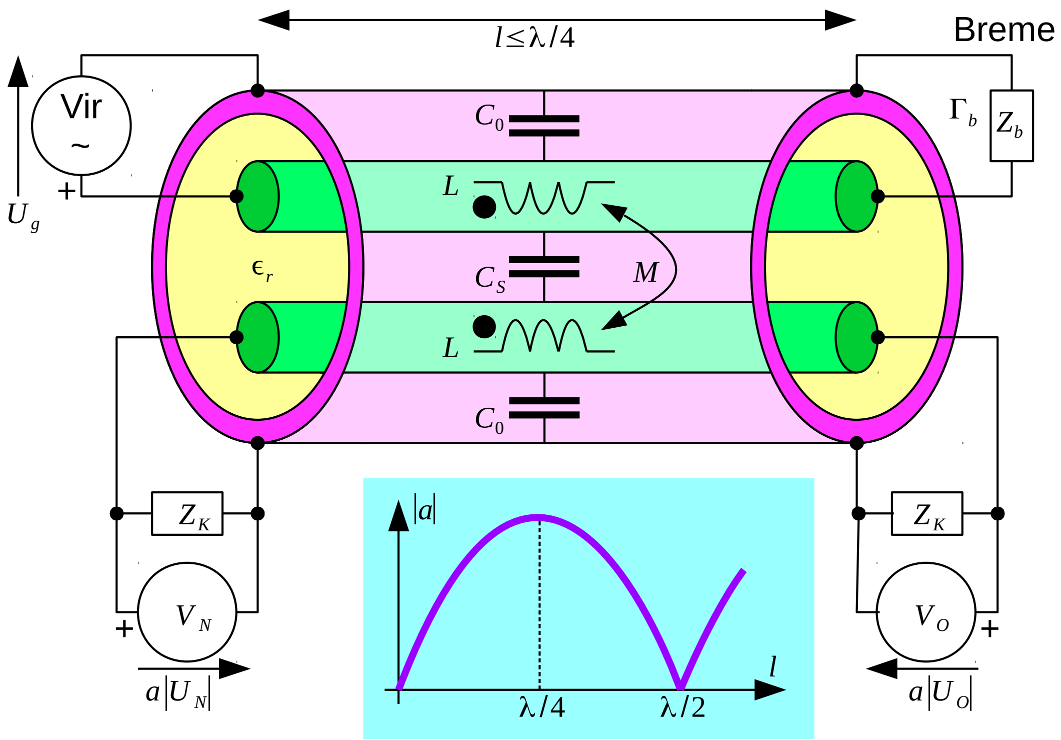
Slabljenje voda

$$|U_N(z)|=|U_N(0)|\cdot e^{-\alpha z} \qquad \alpha\approx\frac{R/l}{2Z_K}$$

$$a_{Np}=\ln\frac{|U_N(0)|}{|U_N(l)|}=\alpha l \qquad a_{Np}/l=\alpha$$

$$a_{dB}=\frac{20}{\ln 10}\cdot a_{Np}=\frac{20}{\ln 10}\cdot\alpha l \qquad a_{dB}/l=\frac{20}{\ln 10}\cdot\alpha$$

Logaritemske merske enote



Protismerni sklopnik

* * * * *