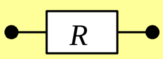
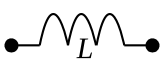
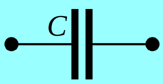
Frekvenčni prostor in kazalci

Obravnava elektrotehnične naloge je v časovnem prostoru povsem nazorna. Trenutne fizikalne veličine, na primer napetost $u(t)$ in tok $i(t)$, so natančno tisto, kar vidimo na zaslonu osciloskopa. Časovno odvisnost namenoma poudarimo z zapisom veličin z malimi črkami. Reševanje enačb tudi s povsem linearnimi gradniki žal v časovnem prostoru ni preprosto. Obnašanje gradnikov, ki lahko hranijo energijo, na primer tuljav L oziroma kondenzatorjev C, opisujejo odvodi oziroma integrali vpletenih veličin.

Matematiki se reševanju linearnih enačb z odvodi in integrali spretno izognejo z integralskimi transformacijami. Obnašanju linearnega vezja pri krmiljenju s harmonskimi (sinusnimi) signali se dobro prilega Fourier-jeva transformacija v frekvenčni prostor s krožno (realno) frekvenco ω. Za obravnavo prehodnih pojavov v linearnih vezjih je primernejša Laplace-jeva transformacija s kompleksno frekvenco $s=\sigma+j\omega$. V obeh primerih se časovni odvodi oziroma integrali preslikajo v množenje oziroma deljenje s frekvenco:

Časovni prostor		Fourier	Laplace
$f(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(\omega)=\int f(t)e^{-j\omega t}dt$ $j=\sqrt{-1}$	$F(s)=\int f(t)e^{-st}dt$ $s=\sigma+j\omega$
$\frac{d}{dt}f(t)$	$\longleftrightarrow$	$j\omega\cdot F(\omega)$	$s\cdot F(s)$
$\int f(t)dt$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{j\omega}\cdot F(\omega)$	$\frac{1}{s}\cdot F(s)$
$u(t)=R\cdot i(t)$		$U(\omega)=R\cdot I(\omega)$	$U(s)=R\cdot I(s)$
$u(t)=L\cdot\frac{di(t)}{dt}$		$U(\omega)=j\omega L\cdot I(\omega)$	$U(s)=sL\cdot I(s)$
$u(t)=\frac{1}{C}\cdot\int i(t)dt$		$U(\omega)=\frac{1}{j\omega C}\cdot I(\omega)$	$U(s)=\frac{1}{sC}\cdot I(s)$

Jasno moramo pri kateremkoli integriranju meje postaviti tako, da je na mejah integracije energija v gradnikih, tuljavah L in kondenzatorjih C enaka nič oziroma upoštevana v dodatnih integracijskih konstantah. Na primer, začetno energijo v kondenzatorju upoštevamo kot dodatno napetost U_0, ki jo prištejemo integralu za napetost na kondenzatorju. Pri uporabi integralski transformacij se jasno vprašamo, kaj v resnici pomenijo nove veličine, spektri $I(\omega)$ in $U(\omega)$ oziroma $I(s)$ in $U(s)$ v pripadajočem frekvenčnem prostoru ter kako jih izmerimo?

Najpreprostejši zgled je krmiljenje vezja s harmonskim virom ene same frekvence ω. Izmenično napetost $u(t)$ tedaj opisujeta dva realna podatka: amplituda U in pripadajoči fazni kot φ_U. Izraz $\cos(\omega t+\varphi_U)$ lahko zapišemo tudi kot realni del kompleksne eksponentne funkcije. Oba realna podatka U in φ_U, ki imata jasno določen fizikalni pomen, združimo v eno samo kompleksno število $\hat{U}$, ki ga imenujemo kazalec (angleško: phasor) napetosti:

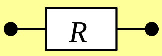
$$u(t)=U\cdot\cos(\omega t+\varphi_U)=\mathrm{Re}\left[U\cdot e^{j\varphi_U}\cdot e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\hat{U}\cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$i(t)=I\cdot\cos(\omega t+\varphi_I)=\mathrm{Re}\left[I\cdot e^{j\varphi_I}\cdot e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\hat{I}\cdot e^{j\omega t}\right]$$

Kazalci

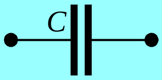
$$\hat{U}=U\cdot e^{j\varphi_U}$$

$$\hat{I}=I\cdot e^{j\varphi_I}$$

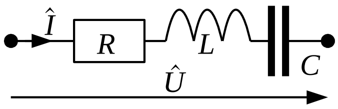


$$u(t)=R\cdot i(t)=\mathrm{Re}[R\cdot\hat{I}\cdot e^{j\omega t}]\longrightarrow\hat{U}=R\cdot\hat{I}$$

$$u(t)=L\cdot\frac{di(t)}{dt}=\mathrm{Re}[L\cdot\hat{I}\cdot j\omega\cdot e^{j\omega t}]\longrightarrow\hat{U}=j\omega L\cdot\hat{I}$$

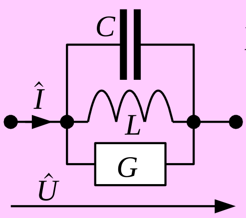


$$u(t)=\frac{1}{C}\cdot\int i(t)\,dt=\mathrm{Re}[\frac{1}{C}\cdot\hat{I}\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot e^{j\omega t}]\longrightarrow\hat{U}=\frac{1}{j\omega C}\cdot\hat{I}$$



$$\hat{U}=\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)\cdot\hat{I}=Z\cdot\hat{I}$$

$$Z=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}=R+jX$$



$$\hat{I}=\left(j\omega C+\frac{1}{j\omega L}+G\right)\cdot\hat{U}=Y\cdot\hat{U}$$

$$G=1/R$$

$$Y=j\omega C+\frac{1}{j\omega L}+G=G+jB$$

Računanje s kazalci $\hat{U}$ in $\hat{I}$ postane z izjemo uporabe kompleksnih števil silno enostavno. Časovne odvode oziroma integrale zamenja množenje oziroma deljenje z $j\omega$. Integracijske konstante, energije v tuljavah L in v kondenzatorjih C, smemo zanemariti, saj pri eni sami frekvenci ω opazujemo ustaljeno (stacionarno) stanje vezja, ko je kakršenkoli prehodni pojav že izzvenel.

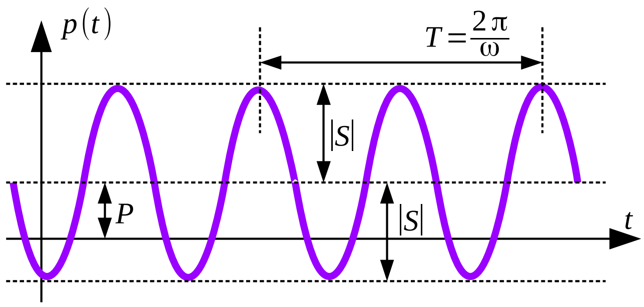
Pri računu s kazalci je smiselno uvesti nova pojma impedance Z in admitance Y. Impedanca Z je kompleksna upornost, ki vključuje realno upornost R in imaginarno reaktanco jX. Admitanca Y je kompleksna prevodnost, ki vključuje realno prevodnost G in imaginarno susceptanco jB. Imaginarni veličini reaktanca jX oziroma susceptanca jB opisujeta gradnike, ki hranijo energijo: tuljave L in kondenzatorje C. Takšne gradnike imenujemo reaktivni gradniki.

Preprost račun s kazalci oziroma spektri integralskih transformacij odpove, ko trčimo ob nelinearno nalogo. Najpogostejša nelinearna naloga je izračun moči. V časovnem prostoru je trenutna moč $p(t)=u(t)\cdot i(t)$ zmnožek trenutne napetosti in toka. Pri harmonskem krmiljenju trenutna moč niha z dvakratno frekvenco 2ω kot posledica kvadratne naloge, množenja napetosti in toka. Moč lahko v določenih trenutkih postane tudi negativna, ko tuljave L in kondenzatorji C vračajo vskladiščeno energijo nazaj viru:

$$u(t)=U\cdot\cos(\omega t+\varphi_U)=\mathrm{Re}\left[\hat{U}\cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$i(t)=I\cdot\cos(\omega t+\varphi_I)=\mathrm{Re}\left[\hat{I}\cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$\hat{U}=U\cdot e^{j\varphi_U} \qquad \hat{I}=I\cdot e^{j\varphi_I}$$



$$p(t)=u(t)\cdot i(t)=U\cdot I\cdot\cos(\omega t+\varphi_U)\cdot\cos(\omega t+\varphi_I)=\frac{U\cdot I}{2}\cdot\left[\cos(\varphi_U-\varphi_I)+\cos(2\omega t+\varphi_U+\varphi_I)\right]$$

Kompleksna moč $$S=P+jQ=\frac{\hat{U}\cdot\hat{I}^*}{2}=\frac{U\cdot e^{j\varphi_U}\cdot I\cdot e^{-j\varphi_I}}{2}=\frac{U\cdot I}{2}\cdot e^{j(\varphi_U-\varphi_I)}$$

Navidezna moč $$|S|=\left|\frac{\hat{U}\cdot\hat{I}^*}{2}\right|=\frac{U\cdot I}{2}=\frac{p(t_{MAX})-p(t_{MIN})}{2}$$

Delovna moč $$P=\langle p(t)\rangle=\mathrm{Re}\left[\frac{\hat{U}\cdot\hat{I}^*}{2}\right]=\frac{U\cdot I}{2}\cdot\mathrm{Re}\left[e^{j(\varphi_U-\varphi_I)}\right]=\frac{U\cdot I}{2}\cdot\cos(\varphi_U-\varphi_I)$$

Jalova moč $$Q=\mathrm{Im}\left[\frac{\hat{U}\cdot\hat{I}^*}{2}\right]=\frac{U\cdot I}{2}\cdot\mathrm{Im}\left[e^{j(\varphi_U-\varphi_I)}\right]=\frac{U\cdot I}{2}\cdot\sin(\varphi_U-\varphi_I)$$

Pri računanju s kazalci $\hat{U}$ in $\hat{I}$ je smiselno uvesti nov pojem kompleksne moči $S=P+jQ$. Pri izračunu moči je pomembna razlika med faznim kotom napetosti in toka $\varphi_U-\varphi_I$. Na primer, kompleksna moč na uporu R je povsem delovna in večja od nič, razlika med faznima kotoma

$\varphi_U - \varphi_I = 0$ je tedaj enaka nič. Reaktivni gradniki, tuljave L in kondenzatorji C, samo hranijo energijo, ne trošijo pa nobene moči, zato je kompleksna moč na njih povsem jalova in znaša razlika med faznima kotoma $\varphi_U - \varphi_I = \pm\pi/2$.

Razliko faznega kota dobimo z množenjem kazalca napetosti $\hat{U}$ s konjugirano-kompleksno vrednostjo kazalca toka $\hat{I}*$. Ker kazalca $\hat{U}$ in $\hat{I}*$ vsebujeta amplitudi, torej vršni vrednosti harmonske napetosti in toka, moramo rezultat za moč deliti z dva! Deljenje z dva neposredno sledi iz izračuna povprečne moči $\langle p(t) \rangle$, ko izločimo nihanje moči z dvojno frekvenco 2ω.

V praksi pogosto uporabljamo efektivni vrednosti toka $I_{eff} = I/\sqrt{2}$ in napetosti $U_{eff} = U/\sqrt{2}$, da se izognemo deljenju z dva pri računanju moči. Podobno lahko definiramo tudi kazalca $\hat{I_{eff}} = \hat{I}/\sqrt{2}$ in $\hat{U_{eff}} = \hat{U}/\sqrt{2}$. Pri navajanju oziroma uporabi podatkov v praksi moramo biti zelo previdni, kaj točno mislimo: amplitudo (vršno vrednost) ali efektivno vrednost?

Realni del kompleksne moči $S = P + jQ$ je delovna moč $P = \langle p(t) \rangle$ oziroma dolgotrajno časovno povprečje trenutne moči. Navidezna moč $|S|$ opisuje amplitudo nihanja trenutne moči $p(t)$ z dvakratno frekvenco 2ω okoli povprečja $P = \langle p(t) \rangle$. Imaginarni del kompleksne moči $S = P + jQ$ je jalova moč Q, torej merilo za vskladiščeno energijo v reaktivnih gradnikih: tuljavah L in kondenzatorjih C.

V elektrodinamiki si pogosto ne moremo privoščiti zgoraj opisanega razkošja črk in oznak frekvenčnega prostora. Ko želimo izrecno poudariti kazalce, pripadajoči veličini $\hat{U}$ in $\hat{I}$ zapisujemo s strešicami nad velikimi črkami, da jih razlikujemo od enosmernih veličin oziroma amplitud U in I. V večini nalog elektrodinamike si razkošja dodatnih strešic ne želimo. Ko za določene veličine natančno vemo, da so kazalci, zanje uporabljamo kar velike črke brez strešic. Na primer, U in I v takšni nalogi pomenita kazalce!

Podobno si ne moremo privoščiti uporabe treh različnih črk P, Q in S samo za zapis kompleksne moči. V elektrodinamiki uporabljamo veliko črko P kar za kompleksno moč. $\mathrm{Re}[P]$ je tedaj delovna moč, $|P|$ navidezna moč in $\mathrm{Im}[P]$ jalova moč. Veliko črko S v elektrodinamiki najpogosteje uporabljamo za gostoto kompleksne moči na enoto površine z merskimi enotami $\mathrm{W/m^2}$. Realni del, velikost in imaginarni del pomenijo gostoto delovne moči $\mathrm{Re}[S]$, gostoto navidezne moči $|S|$ in gostoto jalove moči $\mathrm{Im}[S]$.

Končno je težava še s kazalci, ki jih nemarneži v tuji literaturi imenujejo kar vektorji namesto pravilnega angleškega izraza phasor. Vektorji so nekaj povsem drugega, potrebujemo jih za opis nekaterih fizikalnih veličin v tridimenzijskih nalogah. V elektrodinamiki pogosto naletimo na veličine, ki so hkrati vektorji in kazalci, na primer izmenično (harmonsko) električno polje $\vec{E}$. Kaj takrat točno pomeni izraz $|\vec{E}|$, je treba razvozljati iz pripadajočega besedila oziroma smisla naloge: velikost vektorja (kompleksni skalar), velikost kazalca (realni vektor) ali oboje (realni skalar)?

* * * * *