Smith-ov diagram

Podobno kot ostale elektrotehnične naloge lahko prenosne vode obravnavamo v časovnem prostoru oziroma v frekvenčnem prostoru. Obravnava voda v frekvenčnem prostoru je povsem smiselna, ko z vodom prenašamo razmeroma ozkopasovne signale s pasovno širino $\Delta f \ll f_0$ dosti manjšo od osrednje frekvence, kar je pogost primer v radijskih oddajnikih in sprejemnikih. Obravnava izgub prenosnega voda je bolj preprosta v frekvenčnem prostoru. Končno nam obravnava v frekvenčnem prostoru prinese nov vpogled v delovanje prenosnega voda, tako v teoriji kot pri praktičnih meritvah.

V frekvenčnem prostoru, bolj točno pri krmiljenju s harmonskim virom ene same frekvence ω , trenutni veličini napetost $u(z,t)$ in tok $i(z,t)$ zamenjata kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$. Časovne oziroma frekvenčne odvisnosti posebej ne zapisujemo, saj k vsakemu kazalcu sodi zraven člen $e^{j\omega t}$. Slednjega po dogovoru ne zapisujemo, saj se v linearnih enačbah vedno natančno krajša.

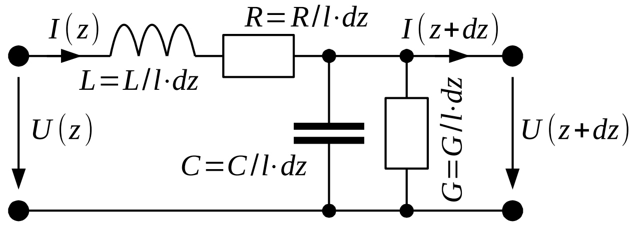
Telegrafsko enačbo prevedemo v frekvenčni prostor tako, da vse odvode po času zapišemo kot $\partial/\partial t = j\omega$. Ostanejo nam seveda odvodi po dolžini z . Kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ sta funkciji ene same spremenljivke z , torej lahko delne odvode $\partial/\partial z = d/dz$ pišemo kot navadne odvode.

Pri reševanju sklopljenih diferencialnih enačb za kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ uporabimo namig iz časovnega prostora, kjer je prostorska odvisnost zelo podobna funkcija časovni odvisnosti. Enačbi poskusimo rešiti v frekvenčnem prostoru tako, da predpostavimo odvisnost od spremenljivke z v obliki $e^{\mp jkz}$. Pri tem je k lahko poljubna konstanta, tudi kompleksna. Konstanta k ima sicer globlji fizikalni pomen, da si zasluži svoje lastno ime: valovno število.

Z uvedbo valovnega števila k pišemo odvode po dolžini z v obliki $d/dz = \mp jk$. Predznak - ali + izbiramo v frekvenčnem prostoru na povsem enak način kot v časovnem prostoru, torej rešitev za napredujoči ali odbiti val. Drugi odvod po spremenljivki z ima vedno enak predznak $d^2/dz^2 = -k^2$ ne glede na to, ali gre za napredujoči oziroma odbiti val.

Z uvedbo valovnega števila k in poenostavitvijo odvodov po dolžini z postane rešitev telegrafske enačbe v frekvenčnem prostoru silno preprosta, ne glede na to, ali upoštevamo izgube ali ne:

Vod z izgubami



$$\frac{dU(z)}{dz}=-j\omega L/l\cdot I(z)-R/l\cdot I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz}=-j\omega C/l\cdot U(z)-G/l\cdot U(z)$$

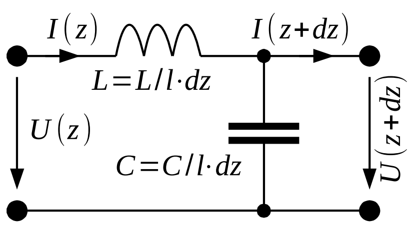
$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}=(j\omega L/l+R/l)(j\omega C/l+G/l)\cdot U(z)=-k^2U(z)$$

$$k=\beta-j\alpha=\sqrt{-(j\omega L/l+R/l)\cdot(j\omega C/l+G/l)}$$

$$U(z)=U_N(0)\cdot e^{-\alpha z}\cdot e^{-j\beta z}+U_O(0)\cdot e^{+\alpha z}\cdot e^{+j\beta z}$$

$$u(z,t)=Re\left[U_N(0)\cdot e^{-\alpha z}\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}+U_O(0)\cdot e^{+\alpha z}\cdot e^{j(\omega t+\beta z)}\right]$$

Brezizgubni vod



$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}=-\omega^2 L/l\cdot C/l\cdot U(z)=-k^2U(z)$$

$$k=\beta=\omega\sqrt{L/l\cdot C/l}=\frac{\omega}{v}$$

$$U(z)=U_N(0)\cdot e^{-j\beta z}+U_O(0)\cdot e^{+j\beta z}$$

$$u(z,t)=Re\left[U_N(0)\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}+U_O(0)\cdot e^{j(\omega t+\beta z)}\right]$$

Napredujoči val

Odbiti (povratni) val

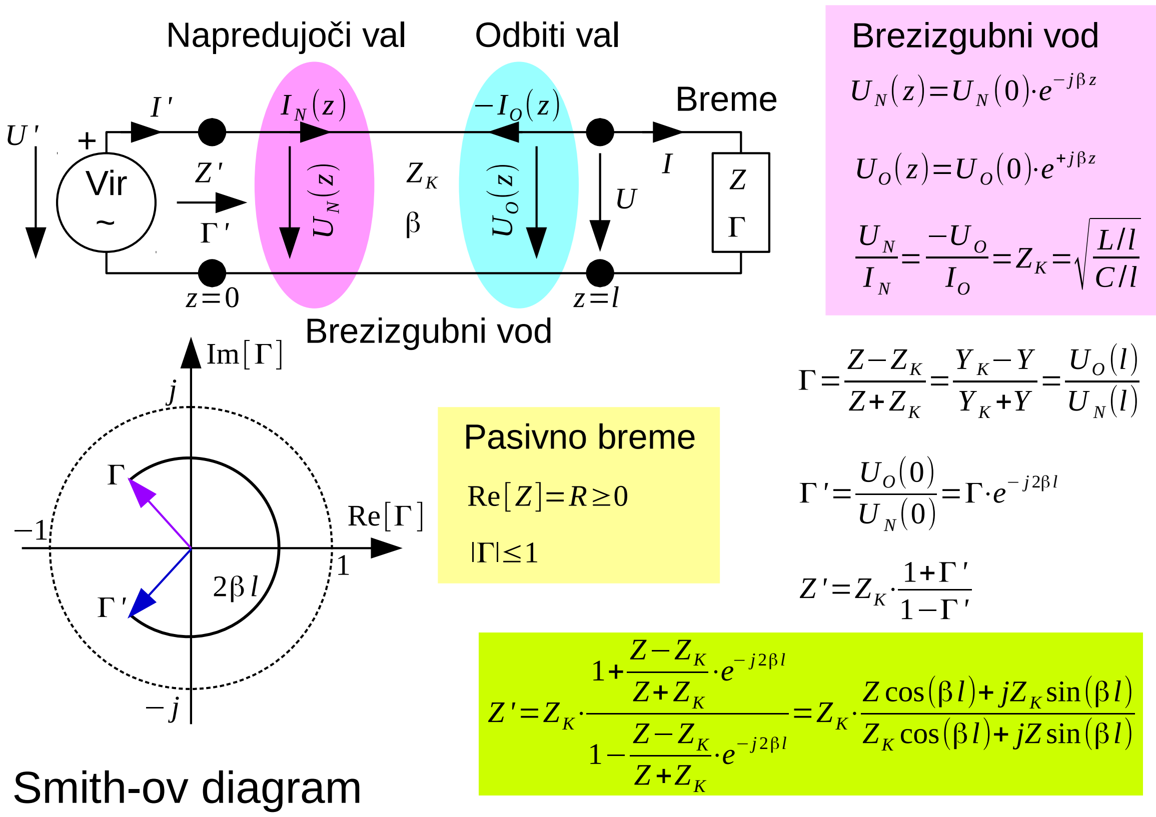
Brezizgubni vod ima povsem realno valovno število k. Valovno število k brezizgubnega voda opisuje samo spreminjanje faze kot funkcija dolžine z. Valovno število je tedaj kar enako fazni konstanti $k=\beta$, ki ima merske enote $\mathrm{rd/m}$ (radiani na meter). Povsem jasno faza napredujočega vala zaostaja z dolžino $e^{-j\beta z}$, faza odbitega vala pa napreduje z dolžino $e^{+j\beta z}$.

Pri krmiljenju s harmonskim virom ene frekvence ω lahko na prenosnem vodu uvedemo pojem valovne dolžine λ. Valovna dolžina je tista razdalja, ko se faza kazalcev napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ ponovi oziroma naredi polni krog $\beta\cdot\lambda=2\pi$. Valovno dolžino lahko izračunamo iz fazne konstante oziroma iz hitrosti valovanja: $\lambda=2\pi/\beta=2\pi v/\omega=v/f$.

Vod z izgubami ima kompleksno valovno število $k=\beta-j\alpha$. Realni del valovnega števila je tudi v tem primeru fazna konstanta $\beta=\mathrm{Re}[k]$, ki ima povsem enak fizikalni pomen kot pri brezizgubnem vodu. Imaginarni del $\alpha=-\mathrm{Im}[k]$ opisuje slabljenje voda na enoto dolžine v logaritemskih merskih enotah $\mathrm{Np/m}$ (Nepri na meter). Slabljenje napredujočega vala v smeri $+z$ zapišemo kot $e^{-\alpha z}$, slabljenje odbitega vala v smeri $-z$ pa kot $e^{+\alpha z}$.

Na povsem enak način kot v časovnem prostoru tudi v frekvenčnem prostoru poimenujemo razmerje med odbitim in napredujočim valom odbojnost $\Gamma = U_O(z)/U_N(z)$. Razmerje dveh kazalcev je seveda kompleksno število, ki je funkcija položaja $\Gamma = \Gamma(z)$. Na brezizgubnem vodu se spreminjata samo fazi napredujočega vala $U_N(z)$ in odbitega vala $U_O(z)$. Absolutna vrednosti kompleksne odbojnosti $|\Gamma(z)|$ oziroma velikost odbojnosti se vzdolž brezizgubnega voda ne spreminja!

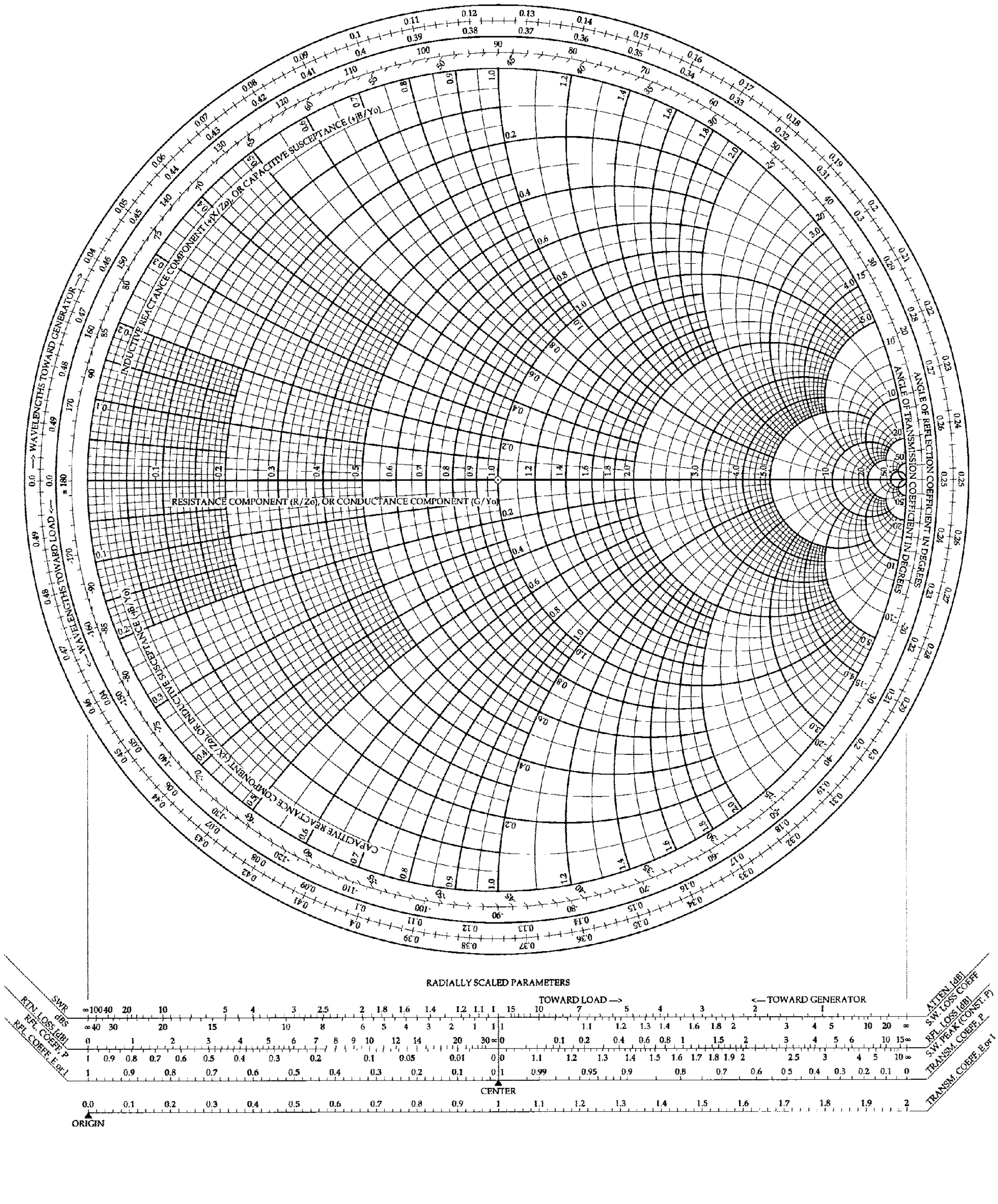
Kompleksno odbojnost Γ na priključnih sponkah bremena izračunamo na podoben način kot v časovnem prostoru, le da upornost bremena R v frekvenčnem prostoru nadomesti impedanca bremena Z. Karakteristično impedanco Z_K brezizgubnega voda izračunamo v frekvenčnem prostoru na povsem enak način kot v časovnem prostoru. Povsem jasno se predznak odbojnosti zamenja pri računanju z dualnimi veličinami, admitanco bremena Y in karakteristično admitanco prenosnega voda Y_K:



Kakršnokoli pasivno breme $\mathrm{Re}[Z] = R \geq 0$ ima velikost odbojnosti

$|\Gamma| \leq 1$ vedno manjšo ali enako enoti. Odbojnost kakršnegakoli pasivnega bremena lahko torej prikažemo v kompleksnem diagramu znotraj enotnega kroga! Takšen prikaz odbojnosti imenujemo Smith-ov diagram. Na Smith-ovem diagramu imamo pogosto vrisane tudi krivulje za delovni in reaktivni del impedance $Z = R + jX$ oziroma admitance $Y = G + jB$:

Smith-ov diagram:
impedanca/admitanca v merilu odbojnosti



Komplicirani računi izmeničnih vezij postanejo v Smith-ovem diagramu silno preprosti. Če med breme in vir vstavimo prenosni vod dolžine l z znano karakteristično impedanco Z_K, se vzdolž voda spreminja samo faza odbojnosti. Bolj točno, odbojnost se zavrti nazaj za dvojni kot $2\beta l$ faze napredujočega oziroma odbitega vala.

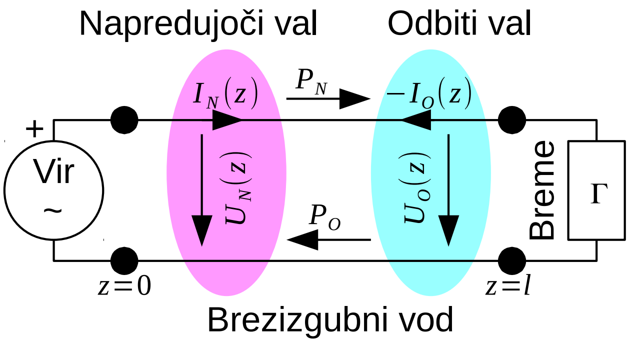
Postopek računanja na brezizgubnem vodu je naslednji. Najprej iz impedance bremena Z določimo odbojnost bremena Γ. Vir vidi preslikano odbojnost $\Gamma'=\Gamma\cdot e^{-j2\beta l}$, kar predstavlja vrtenje odbojnosti v Smith-ovem diagramu. Končno iz preslikane odbojnosti Γ' izračunamo nazaj preslikano impedanco Z', ki jo občuti vir.

Celotno preslikavo impedance bremena Z v impedanco Z', ki jo občuti generator, lahko na brezizgubnem vodu zapišemo s preprosto enačbo. Ko je dolžina voda $l=m\cdot\lambda/2$ celoštevilski mnogokratnik polovice valovne dolžine, se impedanca preslika v povsem enako vrednost $Z'=Z$. Odbojnost $\Gamma(z)$ naredi takrat celo število polnih krogov v Smith-ovem diagramu.

Ko je dolžina voda lihi mnogokratnik četrtine valovne dolžine $l=(2m+1)\cdot\lambda/4$, se impedanca invertira $Z'=Z_K^2/Z$. Invertiranje pomeni zasuk za pol kroga v Smith-ovem diagramu. Pri invertiranju se kratki stik $Z=0$ preslika v odprte sponke $Z'=\infty$. Velja tudi obratno, odprte sponke se pri invertiranju z vodom dolžine $\lambda/4$ preslikajo v kratek stik.

Vod dolžine $\lambda/4$, ki ima na enem koncu odprte sponke in je na drugem koncu kratko sklenjen, se obnaša kot vzporedni LC nihajni krog uglašen na frekvenco ω. Električni nihajni krog s porazdeljenimi gradniki L/l in C/l imenujemo tudi rezonator.

Iz napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ na prenosnem vodu izračunamo kompleksno moč P. Kompleksna moč vsebuje delovno moč $\mathrm{Re}[P]$ in jalovo moč $\mathrm{Im}[P]$. Delovna moč natančno ustreza razliki moči napredujočega in odbitega vala $\mathrm{Re}[P]=P_N-P_O$:



$$U(z)=U_N(z)+U_N(z)$$

$$I(z)=I_N(z)+I_O(z)$$

$$\frac{U_N(z)}{I_N(z)}=-\frac{U_O(z)}{I_O(z)}=Z_K=\sqrt{\frac{L/l}{C/l}}$$

$$P=\frac{U(z)\cdot I(z)*}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left[U_N(0)\cdot e^{-j\beta z}+U_O(0)\cdot e^{+j\beta z}\right]\cdot\left[\frac{U_N(0)*}{Z_K}\cdot e^{+j\beta z}-\frac{U_O(0)*}{Z_K}\cdot e^{-j\beta z}\right]$$

$$P=\frac{|U_N|^2}{2Z_K}-\frac{|U_O|^2}{2Z_K}+j\frac{|U_N\cdot U_O|}{Z_K}\cdot\sin(2\beta z+\varphi)$$

$$U_N(0)\cdot U_O(0)*=|U_N\cdot U_O|\cdot e^{-j\varphi}$$

$$U_O(0)\cdot U_N(0)*=|U_N\cdot U_O|\cdot e^{+j\varphi}$$

Moči valov

$$P_N=\frac{|U_N|^2}{2Z_K}$$

Napredujoča moč

$$P_O=\frac{|U_O|^2}{2Z_K}$$

Odbita moč

Energija stojnega vala

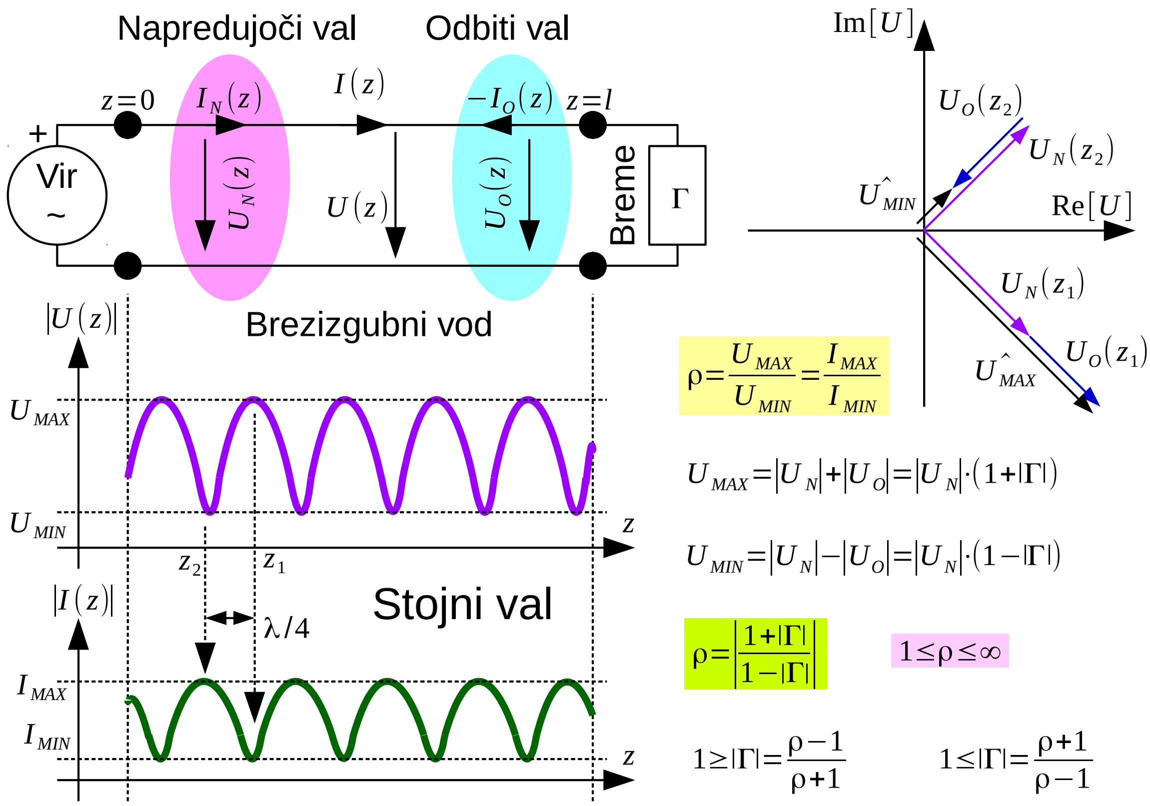
$$\mathrm{Re}[P]=P_N-P_O$$

$$P_O=|\Gamma|^2\cdot P_N$$

$$\mathrm{Re}[P]=P_N\cdot(1-|\Gamma|^2)$$

Skupna energija $W=W_N+W_O$ na prenosnem vodu je enaka vsoti energije napredujočega vala in energije odbitega vala. Napetost in tok na prenosnem vodu bosta kazalčni vsoti napetosti in tokov posameznih valov. Pripadajoči interferenčni pojav imenujemo stojni val. V stojnem valu višek energije niha naprej-nazaj po prenosnem vodu. Magnetna energija v porazdeljeni induktivnosti L/l se pretvarja v električno energijo v porazdeljeni kapacitivnosti C/l in obratno. Nihajočo energijo opisuje jalova moč $\mathrm{Im}[P]$ na prenosnem vodu.

Stojni val najenostavneje opišemo na brezizgubnem vodu. Kazalca napetosti napredujočega $U_N(z)$ in odbitega $U_N(z)$ vala se na določenih mestih (z_1) sofazno seštevata v U_{MAX} , na nekaterih drugih mestih (z_2) pa protifazno odštevata v U_{MIN} . Razdalja med sosednjima maksimumom in minimumom napetosti $z_1-z_2=\lambda/4$ je enaka četrtini valovne dolžine:

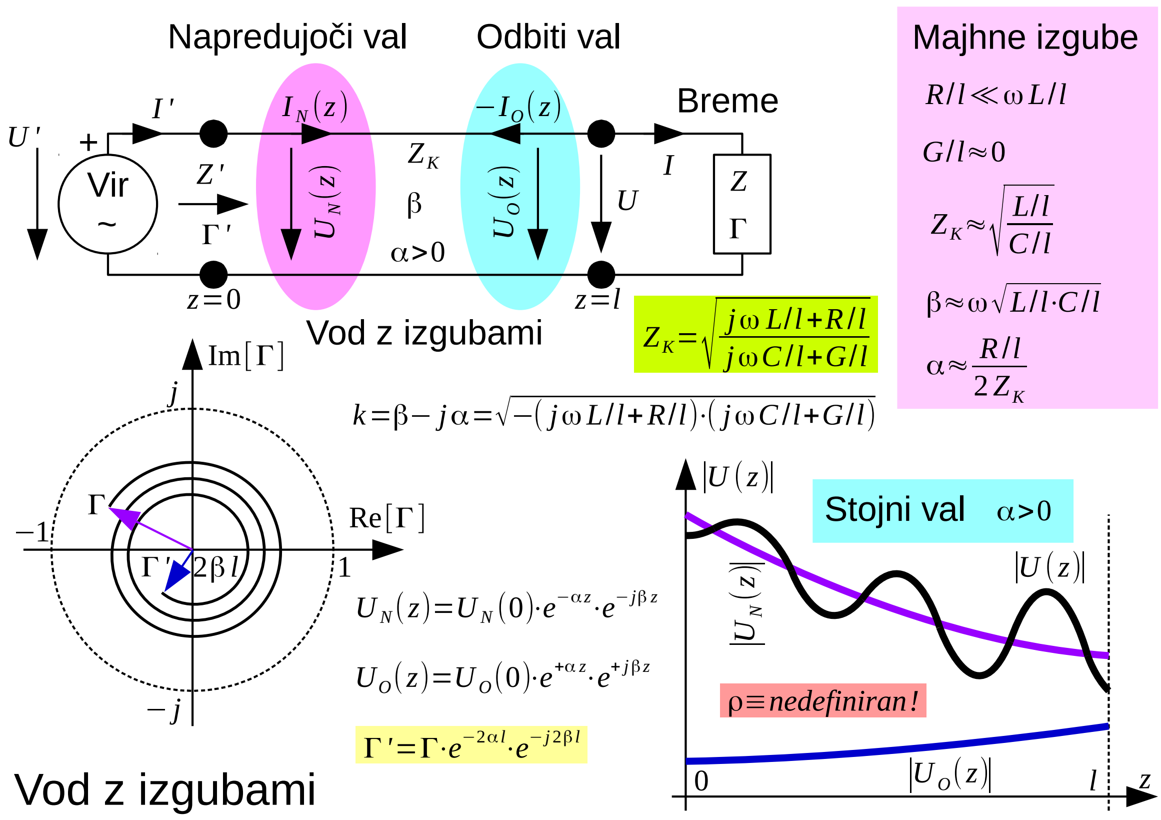


Podoben stojni val kot amplituda napetosti $|U(z)|$ ima tudi amplituda toka $|I(z)|$. Položaji maksimumov toka (z_2) pri tem sovpadajo s položaji minimumov napetosti. Obratno položaji maksimumov napetosti (z_1) sovpadajo s položaji minimumov toka. Energija niha z dvakratno frekvenco 2ω med maksimumi toka in maksimumi napetosti. Energija se kopiči v obliki magnetne energije v porazdeljeni induktivnosti L/l v okolici maksimumov toka oziroma v obliki električne energije v porazdeljeni kapacitivnosti C/l v okolici maksimumov napetosti.

Na brezizgubnem vodu lahko določimo razmerje stojnega vala (angleško: standing-wave ratio ali SWR) oziroma valovitost $\rho=U_{MAX}/U_{MIN}$ kot razmerje med maksimumom in minimumom iste veličine, napetosti ali toka. Dodatno se v slovenski literaturi za razmerje stojnega vala ρ uporablja tudi ponesrečen izraz »neubranost«. Valovitost ρ lahko neposredno izračunamo iz velikosti odbojnosti $|\Gamma|$. V obratni smeri dobimo iz ρ dve različni (recipročni) vrednosti za $|\Gamma|$ za pasivno oziroma aktivno breme.

Valovitost ρ je sicer neimenovano razmerje, ki se lahko giblje v mejah $1\le\rho\le\infty$. Uporaba veličine ρ je vezana na starodavne merilne pripomočke, ki so neposredno opazovali stojni val na merilnem vodu. Danes je bolj smiselno uporabljati velikost odbojnosti $|\Gamma|$ oziroma vsaj preračunati vanjo rezultat meritve ρ, če že ne znamo izmeriti celotne kompleksne odbojnosti Γ. Pozor, fizikalna veličina valovitost ρ sploh ne obstaja na prenosnih vodih z izgubami!

V resničnem prenosnem vodu moramo upoštevati tudi izgube. Kovinski vodniki dodajajo od nič različno zaporedno upornost $R(\omega)$, ki je funkcija frekvence. Nebrezhibna izolacija dodaja vzporedno prevodnost $G(\omega)$, ki je prav tako funkcija frekvence. Pri eni sami frekvenci ω smemo privzeti, da sta upornost vodnikov na enoto dolžine R/l in prevodnost izolacije na enoto dolžine G/l konstanti:



Resnične vode skušamo graditi tako, da bi bile izgube čim manjše. Dielektrike znamo izdelati zelo dobre, kondenzatorji v sodobnem pomnilniku FLASH zadržijo informacijo tudi 100let! Žal nimamo dobrih prevodnikov, tok v kratko-sklenjeni tuljavi iz bakrene žice se razpolovi že v milisekundi. Celo tok v zanki iz supra-prevodnika se razpolovi v enem tednu.

V dobro izdelanem prenosnem vodu smemo zanemariti prevodnost izolacije $G/l \approx 0$. Upornost vodnikov R/l je v zanimivem frekvenčnem področju za telekomunikacije $f \geq 1\,MHz$ za več velikostnih razredov manjša od induktivne reaktance $\omega L/l$. V večini primerov smemo za karakteristično impedanco Z_K in fazno konstanto β uporabiti kar enostavne izraze za brezizgubni vod. Za slabljenje smemo uporabiti približen izraz $\alpha = R/l/(2 Z_K)$.

Na izgubnem prenosnem vodu se spreminjata faza in amplituda odbojnosti $\Gamma(z)$. Napredujoči val $U_N(z)$ je slabljen v smeri $+z$ proti bremenu, odbiti val $U_O(z)$ pa je slabljen v nasprotni smeri $-z$ proti viru. Velikost odbojnosti $|\Gamma(z)|$ je največja na bremenu in upada proti viru. Kompleksna odbojnost $\Gamma(z)$ tedaj opiše logaritemsko spiralo v Smith-ovem diagramu.

Preslikavo impedance bremena Z na tisto, kar vidi vir Z' , naredimo podobno kot na brezizgubnem vodu. Najprej iz impedance Z izračunamo odbojnost bremena Γ . Nato odbojnost bremena zavrtimo po spirali v Smith-ovem diagramu do priključka vira $\Gamma' = \Gamma \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-j2\beta l}$. Končno iz preslikane odbojnosti Γ' izračunamo preslikano impedanco Z' , kar vidi vir.

Tudi na vodu z izgubami se v primeru neprilagojenega bremena $\Gamma \neq 0$ vzpostavi stojni val kot interferenca napredujočega vala $U_N(z)$ in odbitega vala $U_O(z)$. Stojni val ima minimume in maksimume. Tudi na izgubnem vodu velja, da se minimumi napetosti na istih mestih kot maksimumi toka in obratno, minimumi toka se pojavijo na istih mestih kot maksimumi napetosti.

Zaradi različnih smeri slabljenja napredujočega vala $e^{-\alpha z}$ v smeri $+z$ oziroma odbitega vala $e^{+\alpha z}$ v smeri $-z$ so vsi maksimumi stojnega vala napetosti (toka) načeloma različno visoki. Prav tako so vsi minimumi stojnega vala napetosti (toka) različno globoki. Na vodu z izgubami zato razmerje stojnega vala ρ sploh ni določeno!

Stojni val pomeni tudi v primeru voda z izgubami dodatno energijo, ki niha naprej-nazaj po prenosnem vodu. Višek energije pomeni še dodatne izgube na vodu z izgubami. Neprilagojeno breme $\Gamma \neq 0$ torej pomeni še dodatno slabljenje voda v primerjavi s slabljenjem voda do prilagojenega bremena $\Gamma = 0$. Poleg popačenja signalov zaradi zvonjenja je povečano slabljenje neprilagojenih bremen dodaten razlog za skrbno prilagoditev bremen in virov na karakteristično impedanco voda Z_K .

Pri visokih frekvencah so v telekomunikacijah slabljenja in ojačanja lahko zelo visoka razmerja, tudi več kot 10^{12} . Povrhu rešitev telegrafske enačbe in številnih drugih nalog navajajo slabljenje v logaritemskih enotah. Logaritemske merske enote Nepri in Decibeli so zato zelo priljubljene in praktično uporabne:

Neper

$$a_{Np} = \ln \frac{|U_1|}{|U_2|}$$

$$P = \frac{|U|^2}{2 Z_K} \qquad |U| = \sqrt{2 Z_K P}$$

$$a_{Np} = \ln \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Decibel

$$a_{dB} = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$$

$$a_{dB} = 10 \cdot \log \left| \frac{U_1}{U_2} \right|^2 = 20 \cdot \log \frac{|U_1|}{|U_2|}$$

$$a_{dB} = \frac{20}{\ln 10} \cdot \ln \frac{|U_1|}{|U_2|} = \frac{20}{2.3026} \cdot a_{Np}$$

Prilagoditev
(povratno slabljenje, return loss)

$$\Gamma_{dB} = 10 \cdot \log |\Gamma|^2 = 20 \cdot \log |\Gamma|$$

Slabljenje voda

$$|U_N(z)| = |U_N(0)| \cdot e^{-\alpha z} \qquad \alpha \approx \frac{R/l}{2 Z_K}$$

$$a_{Np} = \ln \frac{|U_N(0)|}{|U_N(l)|} = \alpha l \qquad a_{Np}/l = \alpha$$

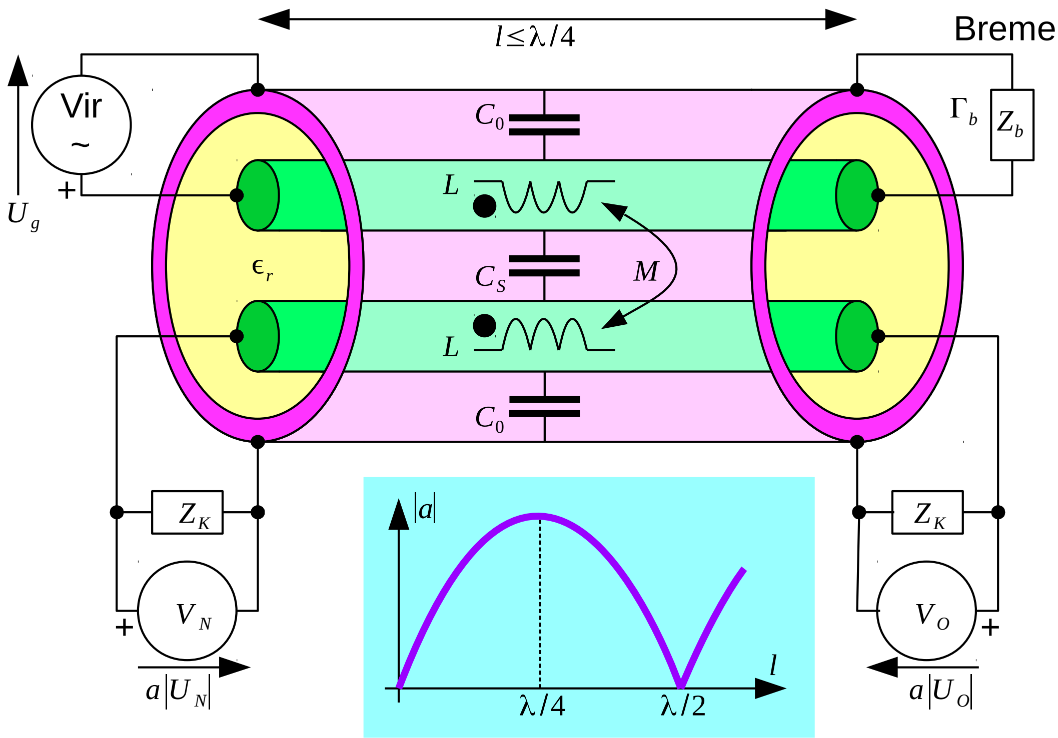
$$a_{dB} = \frac{20}{\ln 10} \cdot a_{Np} = \frac{20}{\ln 10} \cdot \alpha l \qquad a_{dB}/l = \frac{20}{\ln 10} \cdot \alpha$$

Logaritemske merske enote

Nepri $[\mathrm{Np}]$ navajajo slabljenje a_{Np} oziroma ojačanje kot naravni logaritem razmerja amplitud napetosti. Ker so pri izbrani (karakteristični) impedanci Z_K moči sorazmerne kvadratom pripadajočih napetosti, moramo razmerje moči koreniti oziroma razpoloviti rezultat naravnega logaritma.

Decibeli $[\mathrm{dB}]$ navajajo slabljenje a_{dB} oziroma ojačanje kot desetkratnik desetiškega logaritma moči. Pri izbrani (karakteristični) impedanci Z_K moramo za izračun decibelov razmerje amplitud napetosti najprej kvadrirati oziroma pomnožiti desetiški logaritem razmerja amplitud z 20 .

Pretvorba iz Decibelov v Nepre



Protismerni sklopnik

* * * * *