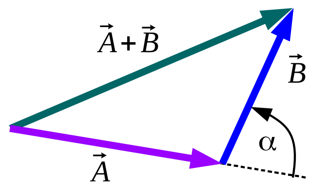
6. Vektorji in koordinate

Povsem natančen opis eno-dimenzijske naloge elektrodinamike je izvedljiv s porazdeljenimi tuljavami, kondenzatorji in upori. Vse veličine vključno s tokovi in napetostmi so skalarne veličine. Skalarno veličino opišemo z enim samim številom, realnim oziroma kompleksnim (kazalec), ki ima določene merske enote. Prave naloge elektrodinamike seveda imajo tri dimenzije v prostoru, kjer opis s skalarnimi veličinami ne zadošča več.

Prave tri-dimenzijske naloge vsebujejo vektorske veličine. Vektor ima velikost in smer. V treh dimenzijah so to tri neodvisna števila s pripadajočimi merskimi enotami, tri realna oziroma tri kompleksna, če nalogo rešujemo v frekvenčnem prostoru in je vektor hkrati tudi kazalec. V izogibanje zmešnjavi vse vektorske veličine vedno označimo s puščico nad črko (imenom), da jih razlikujemo od skalarnih veličin. Isto črko (oznako) brez puščice najpogosteje (ampak ne vedno!) uporabimo za velikost vektorja $A=|\vec{A}|$.

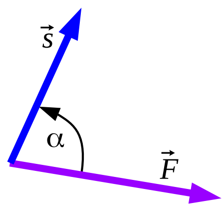
Fizikalne naloge zahtevajo različne računske operacije med vektorji: izračun dolžine (velikosti) vektorja, seštevanje (odštevanje) vektorjev ter dve različni množenji vektorjev:

Seštevanje vektorjev



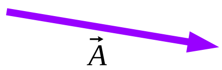
$$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$

Skalarni produkt



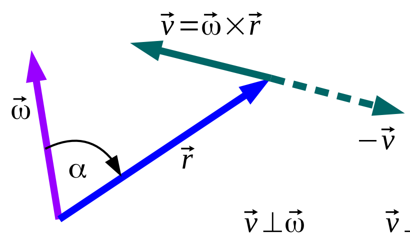
$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}=\vec{s}\cdot\vec{F}=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\alpha$$

Velikost vektorja



$$|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$$

Vektorski produkt



$\vec{v}\perp\vec{\omega}$ $\qquad$ $\vec{v}\perp\vec{r}$

$$|\vec{v}|=|\vec{\omega}\times\vec{r}|=|\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha$$

$\vec{r}\times\vec{\omega}=-\vec{v}=-\vec{\omega}\times\vec{r}$ Desni vijak!

Povsem enako kot skalarne veličine smemo med sabo seštevati le vektorje, ki imajo enake merske enote. Velikost vsote dobimo iz kosinusnega izreka, kjer upoštevamo kot med vektorjema α. Smer vsote je vedno med smermi obeh vektorjev, ki smo ju sešteli. Zaporedje vektorjev je pri seštevanju nepomembno.

Skalarni produkt srečamo v številnih fizikalnih nalogah. Na primer, opravljeno delo W je skalar, bolj točno skalarni produkt vektorja sile $\vec{F}$ in vektorja poti $\vec{s}$. Vmesni kot α določa velikost skalarnega produkta, ki je lahko tudi nič pri $\alpha=\pi/2$ ali celo negativen pri $\alpha>\pi/2$. Pri skalarnem produktu smemo oba vektorja med sabo zamenjati, ker to ne vpliva na rezultat. Skalarni produkt istega vektorja samega s sabo največkrat uporabimo za izračun velikosti vektorja $|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$.

Vektorski produkt srečamo v vseh tri-dimenzijskih nalogah, ki vsebujejo vrtenje, vključno z nalogami magnetike. Na primer, vektorski produkt vektorja krožne frekvence $\vec{\omega}$ in vektorja položaja delca $\vec{r}$ daje vektor hitrosti delca $\vec{v}$. Od vektorskega produkta zahtevamo, da je pravokoten na oba izvorna vektorja in sorazmeren sinusu vmesnega kota α.

Vektor krožne frekvence $\vec{\omega}$ kaže v smeri osi vrtenja. Z upoštevanjem zahteve za pravokotnost ima vektorski produkt $\vec{v}$ še vedno dve možni smeri. Smer vektorskega produkta $\vec{v}$ po definiciji izbiramo po pravilu desnega vijaka. Isto pravilo zahteva, da vektorski produkt zamenja predznak, če zmnožena vektorja med sabo zamenjamo.

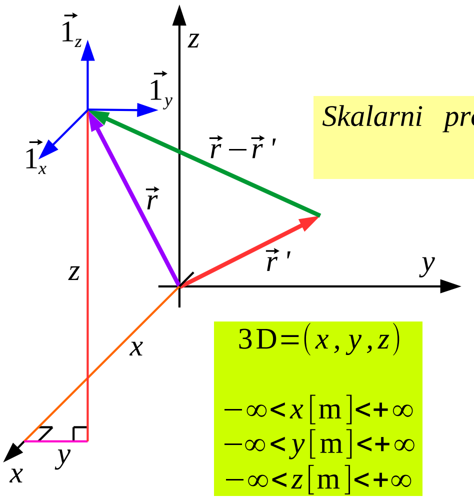
Opis fizikalne naloge, ki vsebuje vektorje, je lahko zelo zahteven. Težko je že določiti kot α med dvema vektorjema. Še težje je določiti, kam kaže vsota dveh vektorjev. Najbolj zoprna naloga je vsekakor določanje smeri vektorskega produkta.

V izogibanje zmešnjavi pri opisu fizikalne naloge (elektrodinamike) je smiselno uvesti koordinatni sistem. Primeren koordinatni sistem naj bi imel naslednje lastnosti, da poenostavi opis in računanje z vektorji:
1) tri dimenzije (3D),
2) pravokotnost med koordinatnimi osmi (pravokotni) in
3) vgrajeno pravilo desnega vijaka (desnoročni).

Koordinatni sistem je izumil francoski matematik René Descartes (1596-1650), da je z njim povezal algebro in geometrijo. Najpreprostejši koordinatni sistem, ki ustreza gornjim zahtevam, je tri-dimenzijski kartezični (latinizirano

Descartes) koordinatni sistem:

Kartezične koordinate



Komponente $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)=\vec{1}_x A_x+\vec{1}_y A_y+\vec{1}_z A_z$

$A_x=\vec{1}_x\cdot\vec{A}\quad A_y=\vec{1}_y\cdot\vec{A}\quad A_z=\vec{1}_z\cdot\vec{A}$

Skalarni produkt $\vec{A}\cdot\vec{B}=(\vec{1}_x A_x+\vec{1}_y A_y+\vec{1}_z A_z)\cdot(\vec{1}_x B_x+\vec{1}_y B_y+\vec{1}_z B_z)$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z$

Velikost $|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

$|\vec{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$3\mathrm{D}=(x,y,z)$

$-\infty<x[\mathrm{m}]<+\infty$
$-\infty<y[\mathrm{m}]<+\infty$
$-\infty<z[\mathrm{m}]<+\infty$

Razdalja $|\vec{r}-\vec{r}\,'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$

Vektorski produkt

$\vec{A}\times\vec{B}=(\vec{1}_x A_x+\vec{1}_y A_y+\vec{1}_z A_z)\times(\vec{1}_x B_x+\vec{1}_y B_y+\vec{1}_z B_z)$

$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{1}_x(A_y B_z-A_z B_y)+$
$+\vec{1}_y(A_z B_x-A_x B_z)+\vec{1}_z(A_x B_y-A_y B_x)$

Smerniki $1=\vec{1}_x\cdot\vec{1}_x=\vec{1}_y\cdot\vec{1}_y=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_z$

Pravokotni $\vec{1}_x\perp\vec{1}_y\perp\vec{1}_z\perp\vec{1}_x\quad 0=\vec{1}_x\cdot\vec{1}_y=\vec{1}_y\cdot\vec{1}_z=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_x$

Desnoročni $\vec{1}_z=\vec{1}_x\times\vec{1}_y\quad \vec{1}_x=\vec{1}_y\times\vec{1}_z\quad \vec{1}_y=\vec{1}_z\times\vec{1}_x$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

V kartezičnem koordinatnem sistemu so vse tri koordinatne osi x, y in z ravne in med sabo pravokotne. Vse tri koordinate imajo merske enote razdalje, torej metri $[\mathrm{m}]$ v sistemu merskih enot MKSA. Pravilo desnega vijaka zagotavlja pisanje koordinat v dogovorjenem vrstnem redu, torej (x,y,z).

Zelo koristen pripomoček vsakega koordinatnega sistema so smerniki. To so enotni vektorji, ki kažejo v smereh koordinatnega sistema. V izogibanje zmešnjavi razkošja oznak uporabljamo za smernike številko ena, opremljeno s puščico vektorja in indeksom koordinate, kateri pripada. Na primer, $\vec{1}_x$ je enotni vektor v smeri koordinate x.

Smerniki so enotni vektorji, torej $\vec{1}_x\cdot\vec{1}_x=1$. Smerniki so v pravokotnem koordinatnem sistemu med sabo pravokotni, $\vec{1}_x\perp\vec{1}_y$ torej pomeni $\vec{1}_x\cdot\vec{1}_y=0$. Pravilo desnega vijaka zapišemo z vektorskim produktom smernikov $\vec{1}_z=\vec{1}_x\times\vec{1}_y$.

Posebnost kartezičnega koordinatnega sistema je, da so smerniki konstantni vektorji. To pomeni, da v katerikoli točki prostora vsi trije smerniki kartezičnega koordinatnega sistema vedno kažejo v iste tri smeri. V krivočrtnih koordinatnih sistemih, ki so prav tako 3D, pravokotni in desnoročni, to ne velja! Konstantni smerni vektorji in koordinate z merskimi enotami razdalje omogočajo preprost izračun razdalj v kartezičnem koordinatnem sistemu.

S pomočjo smernikov lahko katerikoli vektor razstavimo v treh dimenzijah v tri skalarne komponente. Obratno iz treh skalarnih komponent s pomočjo smernikov dobimo spet prvotni vektor. Zapis vektorja po komponentah znatno poenostavlja računanje z vektorji. Seštevanje dveh vektorjev gre preprosto tako, da seštejemo istoležne komponente.

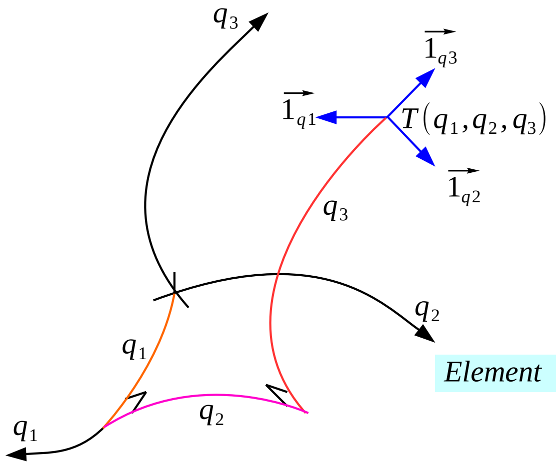
Skalarni produkt dveh vektorjev razvijemo v devet produktov komponent. Od teh je v pravokotnem koordinatnem sistemu šest produktov enako nič! V skalarnem produktu so različni od nič le trije produkti istoležnih komponent, ki jih preprosto seštejemo.

Tudi vektorski produkt dveh vektorjev razvijemo v devet produktov komponent. Od teh so v vektorskem produktu trije produkti istoležnih komponent enaki nič. Ostalih šest od nič različnih produktov komponent izračunamo s pomočjo pravila desnega vijaka za smernike. Navidez kompliciran končni rezultat poenostavimo z zapisom vektroskega produkta v obliki determinante, ki ima v gornji vrstici smernike, v srednji vrstici komponente prvega vektorja in v spodnji vrstici komponente drugega vektorja.

Žal kartezične koordinate (x, y, z) niso najbolj primerne za reševanje nekaterih nalog niti niso v dani nalogi samoumevne. Marsikatero nalogo preprosteje opišemo v krivočrtnem koordinatnem sistemu s splošnimi koordinatami q_1 , q_2 in q_3 . Krivočrtni koordinatni sistem (q_1, q_2, q_3) sicer izberemo 3D, pravokoten in desnoročen, vendar koordinatne osi mogoče niso vse ravne, smerniki niso nujno vsi konstantni vektorji niti koordinate nimajo nujno vse merskih enot razdalje.

Poljuben 3D krivočrtni koordinatni sistem (q_1, q_2, q_3) ima smernike $\overrightarrow{1_{q1}}$, $\overrightarrow{1_{q2}}$ in $\overrightarrow{1_{q3}}$, ki so med sabo pravokotni in določajo pravilo desnega vijaka:

Krivočrtne koordinate



Element dolžine $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

Povezava s karteziČnimi
$x = x(q_1, q_2, q_3)$
$y = y(q_1, q_2, q_3)$
$z = z(q_1, q_2, q_3)$

$$dl_1 = \left(\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\right) dq_1 = h_1 dq_1$$

Element površine $dA = dl_1 dl_2 = h_1 h_2 dq_1 dq_2$

Element prostornine $dV = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$$

$3\mathrm{D} = (q_1, q_2, q_3)$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}$$

Enotni vektorji $1 = \vec{1}_{q1} \cdot \vec{1}_{q1} = \vec{1}_{q2} \cdot \vec{1}_{q2} = \vec{1}_{q3} \cdot \vec{1}_{q3}$

Pravokotni $\vec{1}_{q1} \perp \vec{1}_{q2} \perp \vec{1}_{q3} \perp \vec{1}_{q1}$ $\quad 0 = \vec{1}_{q1} \cdot \vec{1}_{q2} = \vec{1}_{q2} \cdot \vec{1}_{q3} = \vec{1}_{q3} \cdot \vec{1}_{q1}$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}$$

Desnoročni $\vec{1}_{q3} = \vec{1}_{q1} \times \vec{1}_{q2}$ $\quad \vec{1}_{q1} = \vec{1}_{q2} \times \vec{1}_{q3}$ $\quad \vec{1}_{q2} = \vec{1}_{q3} \times \vec{1}_{q1}$

V krivočrtnem koordinatnem sistemu se zaplete pri izračunu katerekoli razdalje, celo diferencialno majhnih premikov. Za izračun poljubne razdalje moramo krivočrtne koordinate (q_1, q_2, q_3) največkrat pretvoriti v kartezične koordinate (x, y, z). Pri majhnih premikih pogosto smemo ubrati bližnjico, primeren faktor, ki majhen premik po eni od krivočrtnih koordinat pretvori v razdaljo.

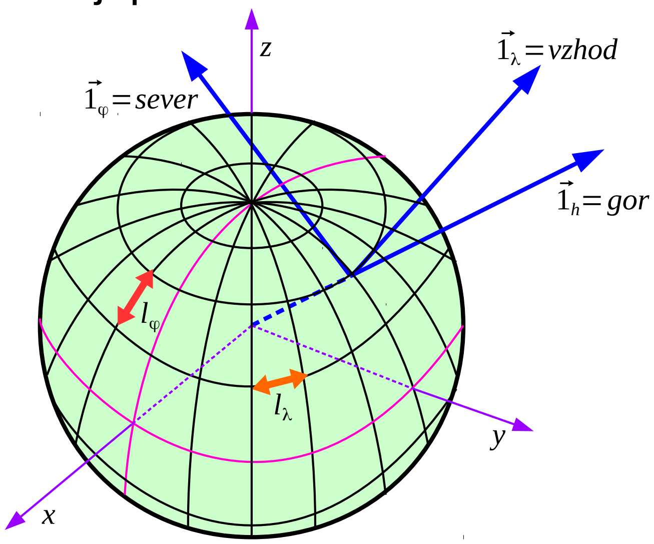
Izračun faktorja pretvorbe majhnega premika v razdaljo ni vedno preprost oziroma samoumeven. Francoski matematik Gabriel Lamé (1795-1870) je pri reševanju nalog v eliptičnih koordinatnih sistemih poiskal splošno pot do faktorjev pretvorbe za diferencialno majhne premike. Laméjevi koeficienti (angleško: scale factors) h_1, h_2 in h_3 opisujejo pretvorbo diferencialno majhnega premika po eni od koordinat, na primer dq_1 v pripadajočo razdaljo $dl_1 = h_1 dq_1$.

Laméjev koeficient h_1 izračunamo iz delnih odvodov vseh treh kartezičnih koordinat $\partial x / \partial q_1$, $\partial y / \partial q_1$ in $\partial z / \partial q_1$ po pripadajoči krivočrtni koordinati. Premik po eni krivočrtni koordnati lahko povzroči premike po vseh treh kartezičnih koordinatah. Celotno razdaljo premika dobimo s Pitagorovim izrekom. Če izpostavimo dq_1, je preostanek ravno iskani Laméjev koeficient h_1.

V diferencialno majhnem elementu dolžine nastopa en sam Laméjev koeficient. V diferencialno majhnem elementu površine nastopata dva Laméjeva koeficienta. V diferencialno majhnem elementu prostornine nastopajo vsi trije Laméjevi koeficienti h_1 , h_2 in h_3 .

Najbolj poljuden primer 3D pravokotnih krivočrtnih koordinat so zemljepisne koordinate: zemljepisna dolžina λ , zemljepisna širina φ in nadmorska višina h . Zemljepisno dolžino in širino merimo v ločnih stopinjah $[^o]$, minutah $[']$ in sekundah $['']$, nadmorsko višino pa v kilometrih $[\mathrm{km}]$ oziroma metrih $[\mathrm{m}]$. Smernik $\vec{1}_\lambda$ kaže na vzhod, smernik $\vec{1}_\varphi$ kaže na sever in smernik $\vec{1}_h$ kaže gor:

Zemljepisne koordinate



Pretvorba $(\lambda, \varphi, h) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = (h + R_Z)\cos\left(\frac{\pi}{180^o}\lambda\right)\cos\left(\frac{\pi}{180^o}\varphi\right)$$
$$y = (h + R_Z)\sin\left(\frac{\pi}{180^o}\lambda\right)\cos\left(\frac{\pi}{180^o}\varphi\right)$$
$$z = (h + R_Z)\sin\left(\frac{\pi}{180^o}\varphi\right)$$
$$R_Z = 6378\,\mathrm{km}$$

Laméjevi koeficienti

$$h_\lambda = \frac{\pi(h + R_Z)}{180^o}\cos\left(\frac{\pi}{180^o}\varphi\right)$$
$$h_\varphi = \frac{\pi(h + R_Z)}{180^o}$$
$$h_h = 1$$

$$3\mathrm{D} = (\lambda, \varphi, h)$$
$$0^o \le \lambda[^o] < 360^o$$
$$-90^o \le \varphi[^o] \le 90^o$$
$$-R_Z \le h[\mathrm{km}] < +\infty$$

Pravokotni $\vec{1}_\lambda \perp \vec{1}_\varphi \perp \vec{1}_h \perp \vec{1}_\lambda$

Desnoročni $\vec{1}_h = \vec{1}_\lambda \times \vec{1}_\varphi$

Zgled: $\lambda = 330^o \quad \varphi = 45^o \quad h = 0\,\mathrm{km}$
$$h_\lambda = 78.7\,\mathrm{km}/^o$$
$$h_\varphi = 111.3\,\mathrm{km}/^o$$
$$h_h = 1$$
$$\Delta\lambda = 20^o \rightarrow l_\lambda = h_\lambda \Delta\lambda = 1574\,\mathrm{km}$$
$$\Delta\varphi = 20^o \rightarrow l_\varphi = h_\varphi \Delta\varphi = 2226\,\mathrm{km}$$

Pretvorbo zemljepisnih koordinat (λ, φ, h) v kartezične (x, y, z) poenostavimo tako, da privzamemo, da je Zemlja krogla s polmerom $R_Z = 6378\,\mathrm{km}$. Pri pretvorbi ne smemo pozabiti na merske enote zemljepisne dolžine in širine, kjer je treba stopinje $[^o]$ najprej pretvoriti v radiane $[\mathrm{rd}]$ za trigonometrijske funkcije $\sin$ in $\cos$. Iz znane povezave s kartezičnim koordinatnim sistemom lahko izračunamo Laméjeve koeficiente h_λ , h_φ in h_h .

V krivočrtnem koordinatnem sistemu so smerniki funkcija koordinat. Na primer, smernik $\vec{1}_h = gor$ kaže v osrednji Evropi drugam kot na Kitajskem, v Novi Zelandiji pa skoraj v obratno smer kot v osrednji Evropi.

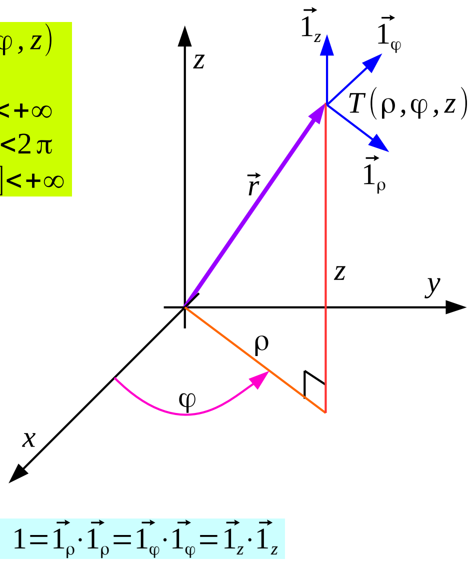
Podobno so lahko funkcija krivočrtnih koordinat tudi nekateri oziroma vsi Laméjevi koeficienti. Plovba ($h = 0\,\mathrm{km}$) po poldnevniku ima konstanten Laméjev koeficient zemljepisne širine $h_\varphi = 111.3\,\mathrm{km}/^\mathrm{o}$. Laméjev koeficient zemljepisne dolžine h_λ je odvisen od zemljepisne širine φ , saj so vzporedniki različno dolgi. Pri zemljepisni širini $\varphi = 45^\mathrm{o}$ znaša $h_\lambda = 78.7\,\mathrm{km}/^\mathrm{o}$.

Med premikanjem po kateremkoli poldnevniku za $\Delta\varphi = 20^o$ prepluje ladja $l_\varphi = 2226\,\mathrm{km}$. Med premikanjem po vzporedniku $45^\mathrm{o}\mathrm{N}$ za $\Delta\lambda = 20^o$ prepluje ladja samo $l_\lambda = 1574\,\mathrm{km}$!

Valjne koordinate

$$3\mathrm{D} = (\rho, \varphi, z)$$

$$0 \le \rho[\mathrm{m}] < +\infty$$
$$0 \le \varphi[\mathrm{rd}] < 2\pi$$
$$-\infty < z[\mathrm{m}] < +\infty$$



Pretvorba $(\rho, \varphi, z) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$
$$z = z$$
$$\vec{1}_x = \vec{1}_\rho\cos\varphi - \vec{1}_\varphi\sin\varphi$$
$$\vec{1}_y = \vec{1}_\rho\sin\varphi + \vec{1}_\varphi\cos\varphi$$
$$\vec{1}_z = \vec{1}_z$$

Laméjevi koeficienti

$$h_\rho = 1$$
$$h_\varphi = \rho$$
$$h_z = 1$$

Pretvorba $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, z)$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan(y/x) \quad (kvadrant\,?)$$
$$z = z$$
$$\vec{1}_\rho = \vec{1}_x\cos\varphi + \vec{1}_y\sin\varphi$$
$$\vec{1}_\varphi = -\vec{1}_x\sin\varphi + \vec{1}_y\cos\varphi$$
$$\vec{1}_z = \vec{1}_z$$

Smerniki $1 = \vec{1}_\rho \cdot \vec{1}_\rho = \vec{1}_\varphi \cdot \vec{1}_\varphi = \vec{1}_z \cdot \vec{1}_z$

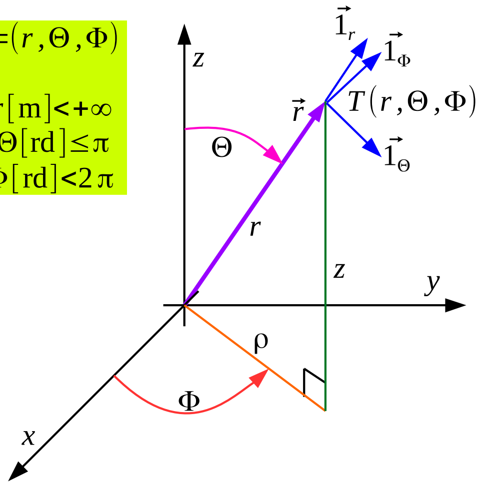
Pravokotni $\vec{1}_\rho \perp \vec{1}_\varphi \perp \vec{1}_z \perp \vec{1}_\rho \quad 0 = \vec{1}_\rho \cdot \vec{1}_\varphi = \vec{1}_\varphi \cdot \vec{1}_z = \vec{1}_z \cdot \vec{1}_\rho$

Desnoročni $\vec{1}_z = \vec{1}_\rho \times \vec{1}_\varphi \quad \vec{1}_\rho = \vec{1}_\varphi \times \vec{1}_z \quad \vec{1}_\varphi = \vec{1}_z \times \vec{1}_\rho$

Krogelne koordinate

$3\mathrm{D}=(r,\Theta,\Phi)$

$0\le r[\mathrm{m}]<+\infty$
$0\le\Theta[\mathrm{rd}]\le\pi$
$0<\Phi[\mathrm{rd}]<2\pi$



Pretvorba $(r,\Theta,\Phi)\to(x,y,z)$

$$x=r\sin\Theta\cos\Phi$$
$$y=r\sin\Theta\sin\Phi$$
$$z=r\cos\Theta$$
$$\vec{1}_x=\vec{1}_r\sin\Theta\cos\Phi+\vec{1}_\Theta\cos\Theta\cos\Phi-\vec{1}_\Phi\sin\Phi$$
$$\vec{1}_y=\vec{1}_r\sin\Theta\sin\Phi+\vec{1}_\Theta\cos\Theta\sin\Phi+\vec{1}_\Phi\cos\Phi$$
$$\vec{1}_z=\vec{1}_r\cos\Theta-\vec{1}_\Theta\sin\Theta$$

Pretvorba $(x,y,z)\to(r,\Theta,\Phi)$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\Theta=\arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$
$$\Phi=\arctan(y/x)\quad(\textit{kvadrant ?})$$
$$\vec{1}_r=\vec{1}_x\sin\Theta\cos\Phi+\vec{1}_y\sin\Theta\sin\Phi+\vec{1}_z\cos\Theta$$
$$\vec{1}_\Theta=\vec{1}_x\cos\Theta\cos\Phi+\vec{1}_y\cos\Theta\sin\Phi-\vec{1}_z\cos\Theta$$
$$\vec{1}_\Phi=-\vec{1}_x\sin\Phi+\vec{1}_y\cos\Phi$$

Enotni vektorji $1=\vec{1}_r\cdot\vec{1}_r=\vec{1}_\Theta\cdot\vec{1}_\Theta=\vec{1}_\Phi\cdot\vec{1}_\Phi$

Pravokotni $\vec{1}_r\perp\vec{1}_\Theta\perp\vec{1}_\Phi\perp\vec{1}_r\quad 0=\vec{1}_r\cdot\vec{1}_\Theta=\vec{1}_\Theta\cdot\vec{1}_\Phi=\vec{1}_\Phi\cdot\vec{1}_r$

Desnoročni $\vec{1}_\Phi=\vec{1}_r\times\vec{1}_\Theta\quad\vec{1}_r=\vec{1}_\Theta\times\vec{1}_\Phi\quad\vec{1}_\Theta=\vec{1}_\Phi\times\vec{1}_r$

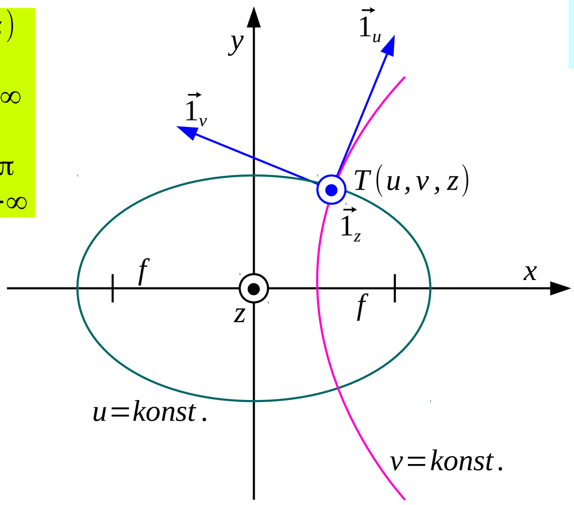
Laméjevi koeficienti

$$h_r=1$$
$$h_\Theta=r$$
$$h_\Phi=r\sin\Theta$$

Valjno-eliptične koordinate

$3\mathrm{D}=(u,v,z)$

$0\le u[\mathrm{Np}]<+\infty$
$f[\mathrm{m}]$
$0\le v[\mathrm{rd}]<2\pi$
$-\infty<z[\mathrm{m}]<+\infty$



Pretvorba $(u,v,z)\to(x,y,z)$

$$x=f\cosh u\cos v$$
$$y=f\sinh u\sin v$$
$$z=z$$

Laméjevi koeficienti

$$h_u=f\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}$$
$$h_v=f\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}$$
$$h_z=1$$

Enotni vektorji $1=\vec{1}_u\cdot\vec{1}_u=\vec{1}_v\cdot\vec{1}_v=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_z$

Pravokotni $\vec{1}_u\perp\vec{1}_v\perp\vec{1}_z\perp\vec{1}_u\quad 0=\vec{1}_u\cdot\vec{1}_v=\vec{1}_v\cdot\vec{1}_z=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_u$

Desnoročni $\vec{1}_z=\vec{1}_u\times\vec{1}_v\quad\vec{1}_u=\vec{1}_v\times\vec{1}_z\quad\vec{1}_v=\vec{1}_z\times\vec{1}_u$

Približek $u\gg1$

$(u,v,z)\to(\rho,\varphi,z)$

$$\rho\approx\frac{f}{2}e^u$$
$$\varphi\approx v$$
$$z=z$$

* * * * *