9. Vektorski potencial

Reševanje preproste elektrotehnične naloge: kakšni sta polji $\vec{E}(\vec{r})$ oziroma $\vec{H}(\vec{r})$, če poznamo izvore, torej vse tokove $\vec{J}(\vec{r})$ in vse elektrine $\rho(\vec{r})$, vodi v dve komplicirani, vektorski diferencialni valovni enačbi drugega reda. Kompliciran račun skušamo poenostaviti z uvedbo novih vmesnih spremenljivk, ki jih imenujemo potenciali.

Račun je najpreprostejši v elektrostatiki $\partial/\partial t=0$ oziroma $\omega=0$. Takrat je vrtinčenje električnega polja zagotovo enako nič $\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})=0$. Če je vrtinčenje vektorskega polja enako nič, lahko takšno polje zapišemo kot smerni odvod neke skalarne veličine. Izbrano skalarno funkcijo $V(\vec{r})$ imenujemo kar potencial v elektrostatiki:

$$\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{grad}\,V(\vec{r})$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon}\ \rightarrow\ \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,V)=\Delta V=-\frac{\rho}{\epsilon}$$

Žal sta takšen potencial $V(\vec{r})$ in pripadajoča diferencialna enačba skoraj neuporabna v elektrodinamiki, kjer velja $\omega\neq 0$ oziroma $\mathrm{rot}\,\vec{E}\neq 0$.

Podoben skalarni potencial $V_m(\vec{r})$ lahko uvedemo v magnetostatiki. $\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r})=0$ zahteva statiko $\partial/\partial t=0$ oziroma $\omega=0$ in hkrati še odsotnost tokov $\vec{J}(\vec{r})=0$ vsaj v tistem delu prostora, kjer uporabljamo $V_m(\vec{r})$. Skalarni magnetni potencial $V_m(\vec{r})$ tedaj določa enačba:

$$\vec{H}(\vec{r})=-\mathrm{grad}\,V_m(\vec{r})$$

$$\mathrm{div}\,\vec{H}=0\ \rightarrow\ \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,V_m)=\Delta V_m=0$$

Žal sta takšen potencial $V_m(\vec{r})$ in pripadajoča diferencialna enačba skoraj neuporabna tam, kjer je $\vec{J}(\vec{r})\neq 0$ oziroma v elektrodinamiki, kjer velja $\omega\neq 0$ oziroma $j\omega\vec{D}\neq 0$.

Gostota električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ je vektorska veličina. Njenega učinka zato ne moremo opisati z neko vmesno skalarno funkcijo, saj skalarna funkcija vsebuje trikrat manj podatkov od vektorske funkcije. Smiselna izbira bo v tem primeru neka vmesna vektorska veličina. Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ je definiral že James Clerk Maxwell kot:

$$\vec{B}(\vec{r})=\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) \quad \text{oziroma} \quad \vec{H}(\vec{r})=\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$$

Pripadajoče električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ dobimo iz Faradayevega zakona. Električnemu polju smemo dodati poljuben smerni odvod, na primer $-\mathrm{grad}\,V(\vec{r})$, saj je vrtinčenje slednjega vedno enako nič:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-j\omega\vec{B}=-j\omega\,\mathrm{rot}\,\vec{A} \;\rightarrow\; \mathrm{rot}\left(\vec{E}+j\omega\vec{A}\right)=0$$

$$\vec{E}(\vec{r})=-j\omega\vec{A}(\vec{r})-\mathrm{grad}\,V(\vec{r})$$

Polji $\vec{E}(\vec{r})$ in $\vec{H}(\vec{r})$ torej računamo preko vmesnih spremenljivk, vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in skalarnega potenciala $V(\vec{r})$ v poljubni nalogi elektrodinamike, kjer velja $\omega\neq 0$, $\vec{J}(\vec{r})\neq 0$ oziroma $\rho(\vec{r})\neq 0$. Pri tem smo skalarni potencial $V(\vec{r})$ izbrali tako, da je čim bolj podoben tistemu iz elektrostatike. Za oba potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ moramo seveda poiskati točne valovne enačbe v elektrodinamiki.

Valovno enačbo za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ dobimo iz Ampèrejevega zakona:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}=\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)=\vec{J}+j\omega\epsilon\vec{E}=\vec{J}+\omega^2\epsilon\vec{A}-j\omega\epsilon\,\mathrm{grad}\,V$$

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)=\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}\right)-\Delta\vec{A}$$

$$\Delta\vec{A}+\omega^2\mu\epsilon\vec{A}=-\mu\vec{J}+\mathrm{grad}\left(j\omega\mu\epsilon V+\mathrm{div}\,\vec{A}\right)$$

V vsem dosedanjem izvajanju je bilo določeno samo vrtinčenje vektorskega potenciala $\mathrm{rot}\,\vec{A}$. Izvornost vektorskega potenciala $\mathrm{div}\,\vec{A}$ je zaenkrat poljubna, saj je popolnoma neodvisna od vrtinčenja.

Izvornost vektorskega potenciala $\mathrm{div}\,\vec{A}$ lahko izberemo na različne načine. Najbolj preprosta je Columbova izbira $\mathrm{div}\,\vec{A}=0$ (angleško: Columb gauge). Valovno enačbo za vektorski potencial najbolj poenostavi Lorentzova izbira $j\omega\mu\epsilon V+\mathrm{div}\,\vec{A}=0$ (angleško: Lorentz gauge):

$$\Delta \vec{A}(\vec{r})+\omega^2\mu\epsilon\vec{A}(\vec{r})=-\mu\vec{J}(\vec{r})$$

Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ je tedaj odvisen samo od gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ in ni odvisen od prostorske elektrine $\rho(\vec{r})$. Iz Gaussovega zakona dobimo še valovno enačbo za skalarni potencial $V(\vec{r})$:

$$\operatorname{div} E=\frac{\rho}{\epsilon}=\operatorname{div}(-j\omega\vec{A}-\operatorname{grad} V)=-\omega^2\mu\epsilon V-\Delta V$$

$$\Delta V(\vec{r})+\omega^2\mu\epsilon V(\vec{r})=-\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Skalarni potencial $V(\vec{r})$ je z Lorentzovo izbiro odvisen samo od prostorske elektrine $\rho(\vec{r})$ in ni odvisen od gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$.

Lorentzova izbira omogoča, da lepo ločimo učinka elektrine $\rho(\vec{r})$ in toka $\vec{J}(\vec{r})$. Elektrina je skalarna veličina in poganja skalarni potencial $V(\vec{r})$. Tok je vektorska veličina in poganja vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$. Pri tem ne smemo pozabiti, da sta tok $\vec{J}(\vec{r})$ in elektrina $\rho(\vec{r})$ povezana z zahtevo za zveznost $j\omega\rho(\vec{r})+\operatorname{div}\vec{J}(\vec{r})=0$.

Konstanta $\omega^2\mu\epsilon$ nastopa v vseh valovnih enačbah za $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ oziroma $V(\vec{r})$. Konstanto lahko izrazimo na različne načine vključno s hitrostjo valovanja $v[\mathrm{m/s}]$:

$$\omega^2\mu\epsilon=\frac{\omega^2}{v^2}=k^2 \rightarrow k=\frac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\mu\epsilon}\equiv valovno\ \ število\ \left[\frac{\mathrm{rd}}{\mathrm{m}}\right]$$

Valovno število k pove, kako hitro se faza spreminja z razdaljo v prostoru. V praznem prostoru seveda velja $\epsilon=\epsilon_0$, $\mu=\mu_0$, $k=k_0$ in $v=c_0\approx 3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$. Z valovnim številom k obe valovni enačbi za potenciala preprosto zapišemo v frekvenčnem prostoru:

$$\Delta\vec{A}(\vec{r})+k^2\vec{A}(\vec{r})=-\mu\vec{J}(\vec{r})$$

$$\Delta V(\vec{r})+k^2V(\vec{r})=-\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Črke A, V, Rho?

* * * * *