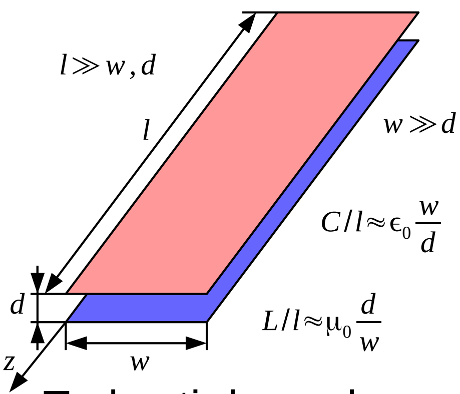
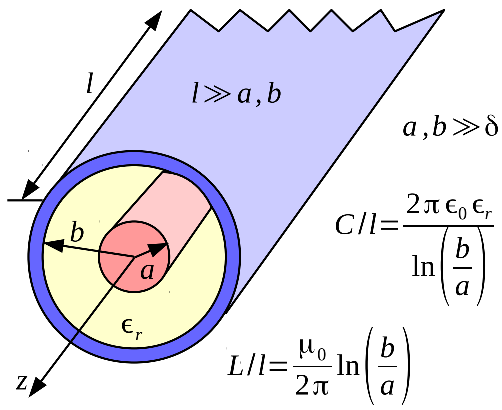
Telegrafska enačba

Električni telegraf je plod dela številnih izumiteljev v prvi polovici 19. stoletja. Uporabnost telegrafa je neposredno vezana na njegov domet. Že v drugi polovici 19. stoletja so inženirji dosegli prekooceanske razdalje. Na tako velikih razdaljah opazimo pojave elektrodinamike že pri zelo nizkih prenosnih hitrostih Morse-jeve telegrafije z ročno oddajo in sprejemom na sluh. Ohmska upornost žice ni edini niti najpomembnejši podatek telegrafskega kabla, nadomestno vezje prenosne poti ni preprosto in takratni inženirji so prvo, enodimenzijsko nalogo elektrodinamike opisali z imenom telegrafska enačba.

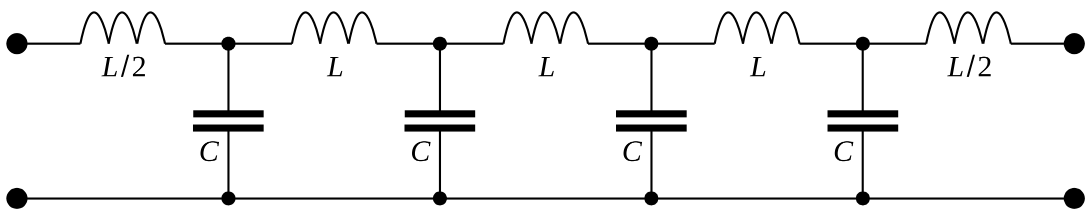
Prenosni vodi ostajajo zelo pomembno področje elektrodinamike tudi danes. Dogovor velja, da v enodimenzijskih nalogah opisuje veliko izmero, kjer opazimo pojave elektrodinamike, koordinata z oziroma dolžina voda l. Prečne izmere prenosnih vodov so v številnih praktičnih primerih zadosti majhne, da jih lahko obravnavamo z enačbami elektrostatike in magnetostatike oziroma jih opišemo z gradniki električnih vezij. Dva preprosta, silno uporabna in vsakdanja zgleda iz osnov elektrotehnike sta trakasti dvovod in koaksialni kabel:



Trakasti dvovod



Koaksialni kabel



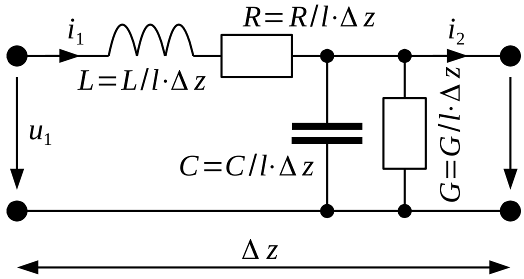
Nadomestno vezje

Trakasti dvovod sestavljata dva kovinska vodnika v obliki trakov širine w in dolžine l. Trakova sta razmaknjena za d v praznem prostoru. Ko velja $w \gg d$, je večina električnega in magnetnega polja v reži med trakovoma. Stresano električno in magnetno polje drugod po prostoru lahko zanemarimo. Izraza za kapacitivnost in induktivnost trakastega dvovoda se tedaj silno poenostavita.

Koaksialni kabel sestavljajo kovinska žila s polmerom a, dielektrik ϵ_r in kovinski oklop z notranjim polmerom b. Koaksialni kabel uporabljamo na tako visokih frekvencah, da tok teče samo po tanki koži debeline $\delta \ll a, b$ na površini vodnikov: po površini žile in po notranji površini oklopa. Magnetno polje v notranjosti vodnikov je tedaj zanemarljivo, kar poenostavi izraz za induktivnost.

Induktivnost in kapacitivnost prenosnega voda sta porazdeljeni veličini po dolžini voda l. Električno nadomestno vezje mora torej vsebovati večje število zaporednih tuljav L in pripadajoče število vzporednih kondenzatorjev C. Vsak elektrotehnik bo v takšnem vezju prepoznal nizkoprepustno frekvenčno sito. Tu je z nadomestnim vezjem nekaj narobe, ker se resnični prenosni vodi nikakor ne obnašajo kot nizkoprepustna sita!

Telegrafska enačba
za vod z izgubami



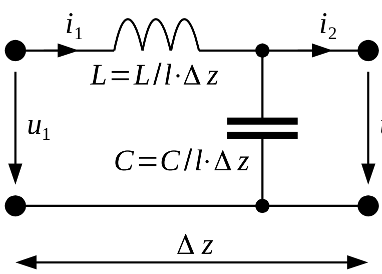
$$\Delta u = u_2 - u_1 = -L \cdot \frac{di_1}{dt} - R \cdot i_1$$

$$\Delta i = i_2 - i_1 = -C \cdot \frac{du_2}{dt} - G \cdot u_2$$

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -L/l \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - R/l \cdot i(z,t)$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C/l \cdot \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - G/l \cdot u(z,t)$$

Telegrafska enačba
za brezizgubni vod



$$\Delta u = u_2 - u_1 = -L \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$\Delta i = i_2 - i_1 = -C \cdot \frac{du_2}{dt}$$

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -L/l \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C/l \cdot \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

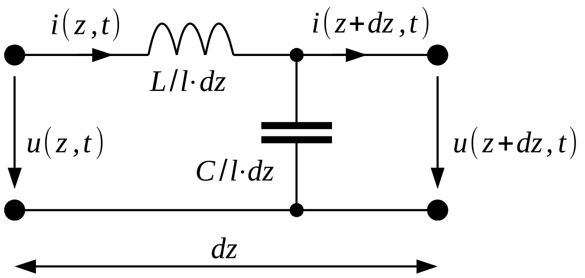
Napaka pri izračunu bo tem manjša, čim krajše odseke prenosnega voda Δz opisujemo s koncentriranimi gradniki: tuljavami in kondenzatorji. Če končno dolžino odseka Δz nadomestimo z diferencialno majhno dolžino odseka dz , dogajanje v nadomestnem vezju opisujeta dve sklopljeni parcialni diferencialni enačbi za napetost $u(z,t)$ in tok $i(z,t)$ s skupnim imenom telegrafska enačba.

V resničnem prenosnem vodu moramo upoštevati tudi izgube. Kovinski vodniki dodajajo od nič različno zaporedno upornost R . Nebrezhibna izolacija dodaja vzporedno prevodnost G . V resničnem vodu oba nista preprosti konstanti, pač pa sta komplicirani funkciji časa $R(t)$ in $G(t)$. Oba je lažje zapisati v frekvenčnem prostoru kot $R(\omega)$ in $G(\omega)$, zato se na opis dogajanja v vodu z izgubami vrnemo kasneje v frekvenčnem prostoru.

Prenosne vode sicer skušamo izdelati tako, da so izgube majhne. V tem primeru nam daje tudi telegrafska enačba za brezizgubni vod razmeroma dober vpogled v dogajanje na prenosnem vodu. Sklopljeni diferencialni enačbi poskusimo rešiti tako, da z dodatnim odvajanjem izločimo eno od neznank, na primer tok $i(z,t)$:

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}=-L/l\cdot\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}=-C/l\cdot\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=-L/l\cdot\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z\,\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z\,\partial t}=-C/l\cdot\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=L/l\cdot C/l\cdot\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}$$

Rešitev telegrafske enačbe

$$u(z,t)=u_N\left(t-\frac{z}{v}\right)+u_O\left(t+\frac{z}{v}\right)$$

Napredujoči val

Odbiti (povratni) val

$$u(z,t)=u\left(t\pm\frac{z}{v}\right) \qquad v=\frac{1}{\sqrt{L/l\cdot C/l}}$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=u''\left(t\pm\frac{z}{v}\right)\cdot\frac{1}{v^2} \qquad \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}=u''\left(t\pm\frac{z}{v}\right)$$

Ostane nam ena sama parcialna diferencialna enačba za napetost $u(z,t)$. Iz enačbe hitro uganemo, da je rešitev $u(z,t)$ lahko poljubna funkcija ene same spremenljivke, primerno utežene vsote oziroma razlike časa t in položaja z. Povezavo med časom in položajem daje hitrost v, s katero se slika funkcije premika naprej oziroma nazaj po osi z. Rešitev z razliko imenujemo tudi napredujoči val in se premika naprej, rešitev z vsoto pa odbiti (povratni) val in se premika nazaj.

Diferencialna enačba drugega reda zahteva dve popolnoma neodvisni rešitvi, napredujoči in odbiti val. Vsaka rešitev za napetost $u(z,t)$ ima pripadadajočo rešitev za tok $i(z,t)$. Povezavo med tokom in napetostjo napredujočega ali odbitega vala imenujemo karakteristična impedanca voda Z_K. Dobimo jo z izračunom odvodov v eni od izvornih sklopljenih enačb:

Karakteristična impedanca

$$\frac{\partial}{\partial z} u\left(t \pm \frac{z}{v}\right) = -L/l \frac{\partial}{\partial t} i\left(t \pm \frac{z}{v}\right)$$

$$\pm\frac{1}{v} u'\left(t \pm \frac{z}{v}\right) = -L/l \cdot i'\left(t \pm \frac{z}{v}\right)$$

$$\frac{u'}{i'} = \frac{u}{i} = \mp v \cdot L/l = \mp\sqrt{\frac{L/l}{C/l}} = \mp Z_K$$

$$\boxed{Z_K = \sqrt{\frac{L/l}{C/l}} = \frac{u_N}{i_N} = -\frac{u_O}{i_O}}$$

Trakasti dvovod

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \frac{d}{w} \cdot \epsilon_0 \frac{w}{d}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

$$Z_K = \sqrt{\frac{\mu_0 \frac{w}{d}}{\epsilon_0 \frac{d}{w}}} = \frac{d}{w}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx \frac{d}{w} \cdot 377\,\Omega$$

Koaksialni kabel

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

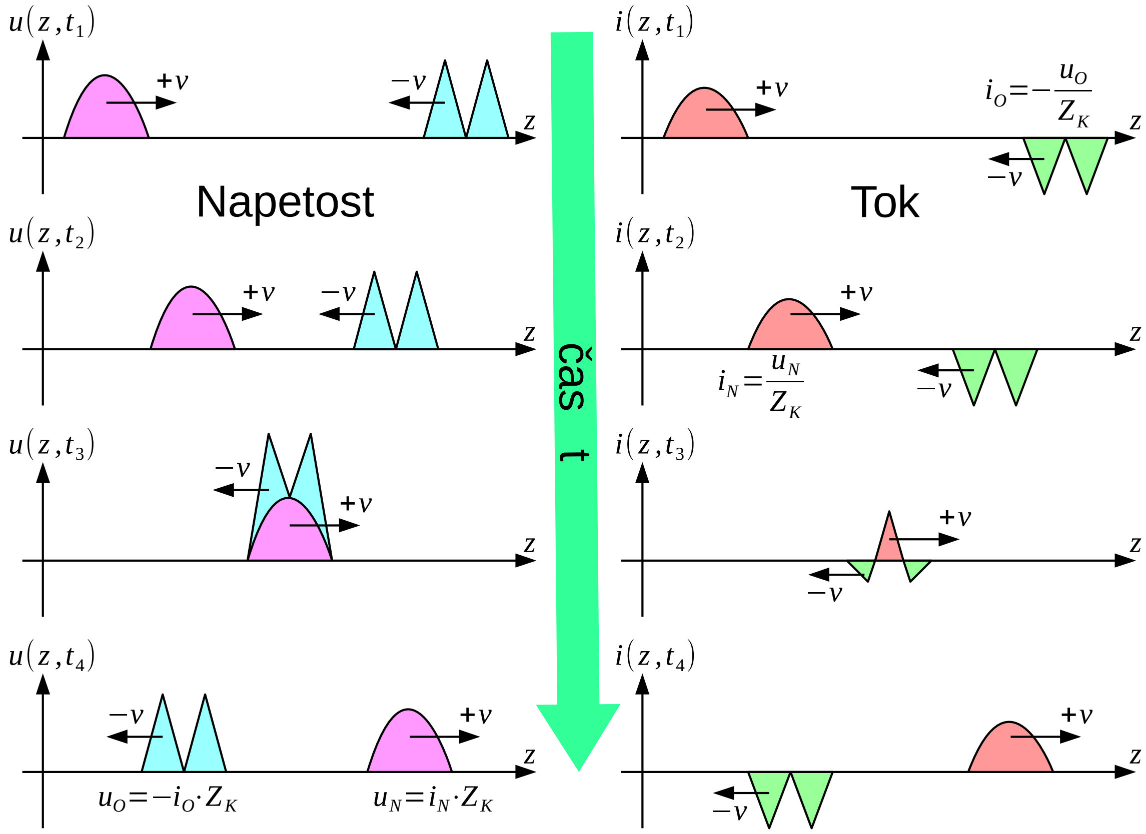
$$Z_K = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \approx \frac{60\,\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pozor, razmerje med napetostjo in tokom napredujočega vala ima glede na naše oznake pozitiven predznak $+Z_K$, razmerje med tokom in napetostjo odbitega vala pa negativen predznak $-Z_K$. Napredujoči in odbiti val imata tudi vsak svojo, neodvisno moč in nosita vsak svojo, neodvisno energijo. V treh dimenzijah bi napredujoči in odbiti val na takšnih prenosnih vodih poimenovali kot dva neodvisna TEM (prečna elektro-magnetna) rodova.

Induktivnost L/l in kapacitivnost C/l prenosnega voda določata dve novi lastnosti voda: hitrost v in karakteristično impedanco Z_K . Hitrost v je enaka hitrosti svetlobe v snovi, ki je uporabljena kot izolator med vodnikoma TEM prenosnega voda. V primeru trakastega dvovoda je to prazen prostor, torej je hitrost valovanja $v=c_0$ enaka hitrosti svetlobe v praznem prostoru. Dielektrik koaksialnega kabla upočasnjuje svetlobo za faktor $\sqrt{\epsilon_r}$. Jasno, v koaksialnem kablu s praznim prostorom kot dielektrikom velja $v=c_0$.

Točna geometrija TEM prenosnega voda, torej širina w in razmak trakov d trakastega dvovoda oziroma polmera žile a in oklopa b koaksialnega kabla, nima nobenega vpliva na hitrost valovanja v ! Prečni presek TEM prenosnega voda vpliva izključno na karakteristično impedanco Z_K prenosnega voda.

Primer rešitve telegrafske enačbe je prikazan spodaj kot časovno zaporedje slikic. Napredujoči in odbiti val napetosti $u(z,t)$ in toka $i(z,t)$ sta namenoma prostorsko omejena in prikazana v različnih barvah:



* * * * *