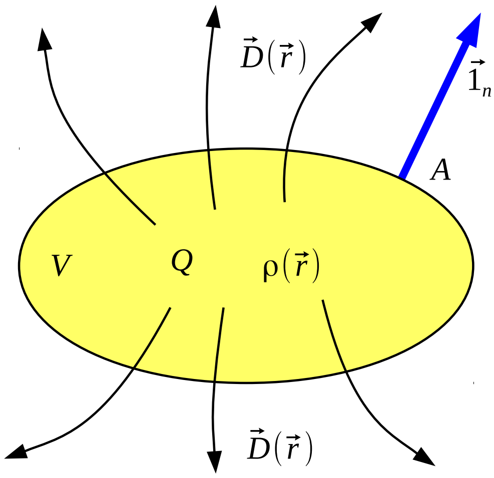
8. Maxwellove enačbe

James Clerk Maxwell je vse dotedanje znanje o elektriki in magnetiki leta 1861 združil v slovite enačbe, ki danes nosijo njegovo ime. Maxwellove enačbe lahko zapišemo na različne načine. V vektorskem zapisu, kot jih najpogosteje uporabljamo danes, jih je dve desetletji za Maxwellom zapisal šele Oliver Heaviside.

Pri osnovah elektrotehnike zapišemo Maxwellove enačbe z najmanj matematike v integralni obliki. V elektrodinamiki jih je treba pretvoriti v diferencialno obliko, da postane naloga zadosti majhna, torej diferencialno majhna. V diferencialno majhni nalogi so zakasnitve diferencialno majhne, torej relativistika ne nagaja.

Povezavo med viri polja in pretokom je našel znani matematik Carl Friedrich Gauss leta 1835. V elektrostatiki je vsota prostorske gostote elektrine $\rho(\vec{r})$ v določeni prostornini V enaka celotni elektrini Q. Isti rezultat da tudi vsota gostote električnega pretoka $\vec{D}(\vec{r})$ po sklenjeni površini A, ki zajema isto prostornino:

Gaussov zakon



Gaussov zakon v integralni obliki

$$\oint\!\!\oint_A \vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{1}_n dA = Q = \iiint_V \rho(\vec{r})\,dV$$

$\rho(\vec{r}) \equiv$ *prostorska gostota elektrine* $[\mathrm{As/m^3}]$

$Q \equiv$ *celotna elektrina* $[\mathrm{As}]$

$\vec{D}(\vec{r}) \equiv$ *gostota električnega pretoka* $[\mathrm{As/m^2}]$

Gaussov izrek

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r})\,dV = \oint\!\!\oint_A \vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{1}_n dA$$

Gaussov zakon v diferencialni obliki

$$\mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

$\vec{E}(\vec{r}) \equiv$ *električna poljska jakost* $[\mathrm{V/m}]$

$\epsilon \equiv$ *dielektričnost* $[\mathrm{As/Vm}]$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon\vec{E}(\vec{r}) \rightarrow \mathrm{div}(\epsilon\vec{E}(\vec{r})) = \rho(\vec{r})$$

Magnetno polje nima izvorov

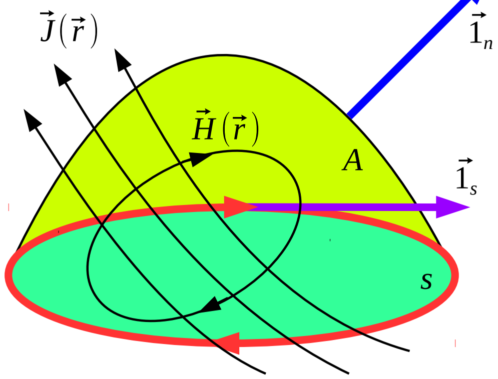
$$\oint\!\!\oint_A \vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{1}_n dA = 0 \rightarrow \mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

Zapis v takšni integralni obliki (seštevanje) je sicer preprosto razumljiv, ampak neroden. Za opis fizikalnega zakona potrebujemo neko prostornino V in neko sklenjeno površino A, ki nista del naloge niti nujno nista majhni. S pomočjo Gaussovega izreka iz matematike pretvorimo Gaussov zakon v diferencialno obliko $\mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$.

Magnetno polje nima izvorov niti ponorov. Gaussov zakon za gostoto magnetnega pretoka $\vec{B}(\vec{r})$ lahko pretvorimo iz integralne oblike v diferencialno $\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r}) = 0$.

Povezavo med električnim tokom I in pripadajočo magnetno poljsko jakostjo $\vec{H}(\vec{r})$ je našel André-Marie Ampère leta 1826. Integral $\vec{H}(\vec{r})$ po sklenjeni krivulji s daje skupni tok I , ki teče skozi krivuljo. Tok I je vsota gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ po poljubni ploskvi A , ki je vpeta na isto sklenjeno krivuljo:

Ampèrejev zakon



Ampèrejev zakon v integralni obliki

$$\iint_A \vec{J}(\vec{r})_{skupni} \cdot \vec{1}_n dA = I = \oint_s \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_s ds$$

$\vec{J}(\vec{r}) \equiv$ *gostota električnega toka* $[\mathrm{A/m^2}]$

$I \equiv$ *celoten električni tok* $[\mathrm{A}]$

$\vec{H}(\vec{r}) \equiv$ *magnetna poljska jakost* $[\mathrm{A/m}]$

Stokesov izrek

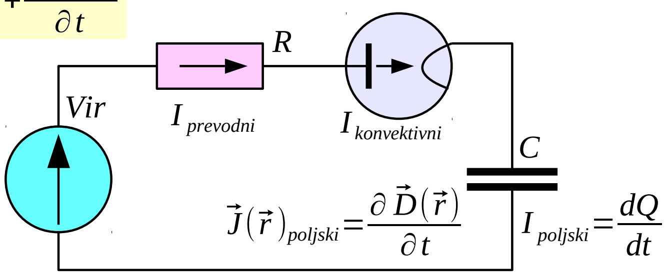
$$\iint_A (\mathrm{rot}\, \vec{H}(\vec{r})) \cdot \vec{1}_n dA = \oint_s \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_s ds$$

Ampèrejev zakon v diferencialni obliki

$$\mathrm{rot}\, \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})_{skupni} = \vec{J}(\vec{r})_{prevodni} + \vec{J}(\vec{r})_{konvektivni} + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r})}{\partial t}$$

$\gamma \equiv$ *specifična prevodnost* $[\mathrm{A/Vm}]$

$$\vec{J}(\vec{r})_{prevodni} = \gamma \vec{E}(\vec{r})$$



$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})_{prevodni} + \vec{J}(\vec{r})_{konvektivni}$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r})}{\partial t} = \vec{J}(\vec{r}) + \epsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial t}$$

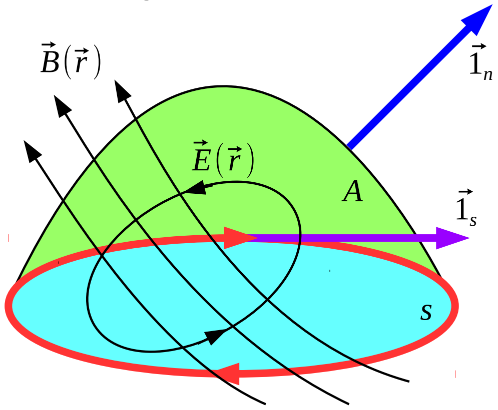
Zapis Ampèrejevega zakona v integralni obliki (seštevanje) je sicer preprosto razumljiv, ampak neroden. Za njegov opis potrebujemo neko sklenjeno krivuljo s in neko ploskev A, ki nista del naloge niti nujno nista majhni. S pomočjo Stokesovega izreka iz matematike pretvorimo Ampèrejev zakon v diferencialno obliko $\mathrm{rot}\, \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})_{skupni}$.

Ampèrejev zakon (Maxwellova razširitev) vključuje vse električne tokove: prevodni tok $I_{prevodni}$ v kovinah, konvektivni tok nosilcev elektrine v povsem praznem prostoru $I_{konvektivni}$ in poljski tok $I_{poljski} = dQ/dt$ kot prirastek električnega pretoka v enoti časa. Gostoto poljskega toka $\partial \vec{D}(\vec{r})/\partial t$ običajno zapišemo posebej. Oznako $\vec{J}(\vec{r})$ običajno uporabljamo za gostoto prevodnega električnega toka, saj konvektivni tok v marsikateri praktični nalogi ne nastopa.

Znotraj prevodnika je gostota prevodnega električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ povezana z električno poljsko jakostjo $\vec{E}(\vec{r})$ preko specifične prevodnosti snovi γ , vendar te povezave pogosto ne zapisujemo.

Michael Faraday je leta 1831 odkril, da sprememba celotnega magnetnega pretoka $d\Phi/dt = -U_i$ inducira v žični zanki napetost. Inducirana napetost je integral električne poljske jakosti po sklenjeni krivulji zanke s. Celoten magnetni pretok je vsota gostote magnetnega pretoka $\vec{B}(\vec{r})$ po poljubni ploskvi A, ki je vpeta na sklenjeno krivuljo zanke:

Faradayev zakon



Faradayev zakon v integralni obliki

$$\oint_s \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{1}_s ds = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_A \vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{1}_n dA$$

$\vec{B}(\vec{r}) \equiv$ *gostota magnetnega pretoka* $[\mathrm{Vs/m^2}]$

$\Phi \equiv$ *celoten magnetni pretok* $[\mathrm{Vs}]$

$\vec{E}(\vec{r}) \equiv$ *električna poljska jakost* $[\mathrm{V/m}]$

Stokesov izrek

$$\iint_A (\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r}))\cdot\vec{1}_n dA = \oint_s \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{1}_s ds$$

Faradayev zakon v diferencialni obliki

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial\vec{B}(\vec{r})}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\vec{H}(\vec{r})}{\partial t}$$

$\mu \equiv$ *permeabilnost* $[\mathrm{Vs/Am}]$

$\vec{B}(\vec{r}) = \mu\vec{H}(\vec{r})$

Magnetno polje nima izvorov

$$\mathrm{div}\left[\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})\right] = 0 = \mathrm{div}\left[-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r})}{\partial t}\right] \rightarrow \mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

Zapis Faradayevega zakona v integralni obliki (seštevanje) je sicer preprosto razumljiv, ampak neroden. Za njegov opis potrebujemo neko sklenjeno krivuljo s in neko ploskev A, ki nista del naloge niti nujno nista majhni. S pomočjo Stokesovega izreka iz matematike pretvorimo Faradayev zakon v diferencialno obliko $\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r}) = -\partial\vec{B}(\vec{r})/\partial t$.

Pri opisani obravnavi Maxwellovih enačb v elektrodinamiki privzamemo poenostavitev, da se krivulje s, ploskve A in prostornine V s časom ne spreminjajo. Prav tako privzamemo, da je odziv snovi linearen in so lastnosti snovi dielektričnost ϵ, prevodnost γ in permeabilnost μ preproste skalarne konstante. Taka snov je torej homogena, da lastnosti snovi niso odvisne od položaja $\vec{r}$, in izotropna, da lastnosti snovi niso tenzorji.

Če izračunamo izvornost $\mathrm{div}()$ Faradayevega zakona, ugotovimo, da gostota magnetnega pretoka $\vec{B}(\vec{r})$ nima izvorov. Magnetnih nabojev ali magnetin kljub vsemu iskanju do danes fiziki niso našli. Poseben zapis Gaussovega zakona za magnetno polje torej sploh ni potreben.

Relativistika sicer nikjer ne zahteva vrtinčenja. Ampère in Faraday mogoče danes izgledata starokopitna? Kljub odsotnosti magnetnih nabojev imamo različne naravne snovi (feromagnetiki) in umetno izdelane uporabne naprave (žične zanke, tuljave), kjer je obravnava z vrtinčenjem dobrodošla. Smeri oziroma predznake magnetnih veličin $\vec{H}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ in Φ smemo poljubno izbrati, na primer z izbiro desnosučnega koordinatnega sistema. Edina resnična fizikalna danost je, da imata Ampère in Faraday različna predznaka!

Če izračunamo izvornost $\mathrm{div}()$ Ampèrejevega zakona, pridemo do pomembne povezave med gostoto električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ in prostorsko gostoto elektrine $\rho(\vec{r})$. V izvorih toka se začne pojavljati primanjkljaj elektrine, v ponorih toka pa začne priraščati višek elektrine. Opisano fizikalno zakonitost imenujemo zveznost toka in elektrine.

Če seštejemo gostoto električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ v celoten električni tok I in prostorsko gostoto elektrine $\rho(\vec{r})$ v celotno elektrino Q , lahko zveznost toka in elektrine opišemo še bolj enostavno s skalarno enačbo. Preprost zgled sta dve sicer izolirani kovinski elektrodi, ki ju povežemo s prevodno žico. Tok v žici I je enak časovnemu prirastku elektrine dQ_1/dt na eni elektrodi in primanjkljaju elektrine $-dQ_2/dt$ na drugi elektrodi:

Zveznost toka in elektrine

$$\textit{Ampère}: \quad \mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r})}{\partial t} \qquad /\mathrm{div}()$$

$$\mathrm{div}\left[\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r})\right] = 0 = \mathrm{div}\,\vec{J}(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r})$$

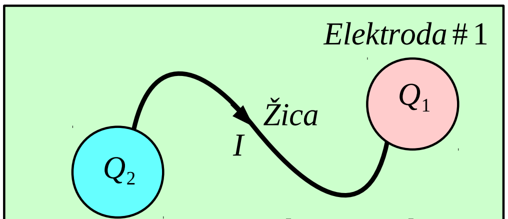
$$\textit{Gauss}: \quad \rho(\vec{r}) = \mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r})$$

$$0 = \mathrm{div}\,\vec{J}(\vec{r}) + \frac{\partial \rho(\vec{r})}{\partial t}$$

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{J}(\vec{r})\,dV = I$$

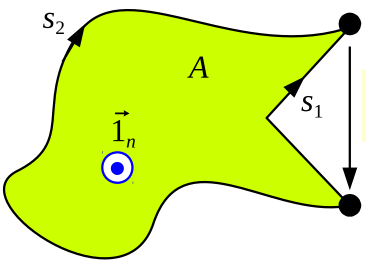
$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\vec{r})}{\partial t}\,dV = \frac{dQ}{dt}$$

$$0 = I + \frac{dQ}{dt}$$



$$-\frac{dQ_2}{dt} = I = \frac{dQ_1}{dt}$$

Definicija napetosti



$$U \equiv \textit{električna napetost} \quad [\mathrm{V}]$$

$$U = -\int_{s_1} \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{1}_{s1}\,ds_1 = -\int_{s_2} \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{1}_{s2}\,ds_2$$

$$\oint_{s_1+s_2} \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{1}_s\,ds = 0 = \iint_A \left(\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})\right)\cdot\vec{1}_n\,dA \;\rightarrow\; \vec{1}_n\cdot\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})\right) = 0$$

V elektrotehničnih nalogah pogosto uporabljamo veličino električno napetost U. Napetost med dvema točkama je integral električne poljske jakosti $\vec{E}(\vec{r})$ po krivulji s, ki povezuje obe točki. V elektrodinamiki definicija napetosti ni vedno smiselna. V marsikateri nalogi elektrodinamike napetost U sploh ne obstaja, ker integracija po različnih poteh daje različne rezultate.

Strogo mišljeno napetost U obstaja samo takrat, ko daje integracija po katerikoli poti enak rezultat. Integracija po katerikoli sklenjeni poti mora dati rezultat nič, kar strogo zahteva $\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r}) = 0$. V marsikateri nalogi se sprijaznimo z definicijo napetosti U v izbrani ravnini in takrat zadošča milejši pogoj $\vec{1}_n\cdot\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})\right) = 0$.

V predlagani vektorski in diferencialni obliki lahko zapišemo Maxwellove enačbe na številne različne načine. Ko so vse električne in magnetne veličine funkcije istega položaja $(\vec{r})$, lahko to v vseh enačbah izpustimo. Preprosta linearna, homogena in izotropna snov nam omogoča, da iz enačb izločimo gostote pretokov. Končno v frekvenčnem prostoru postanejo vse električne veličine kazalci, časovne odvode pa nadomesti $j\omega$:

Valovna enačba

Časovni prostor

$(1)\quad \text{rot}\,\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$(2)\quad \text{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$(3)\quad \text{div}\,\vec{D}=\rho$

Snov

$\vec{D}=\epsilon\,\vec{E}$

$\vec{B}=\mu\,\vec{H}$

Poljske jakosti

$(1)\quad \text{rot}\,\vec{H}=\vec{J}+\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$(2)\quad \text{rot}\,\vec{E}=-\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$(3)\quad \text{div}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon}$

Odvodi

$\frac{\partial}{\partial t}=j\omega$

Frekvenčni prostor

$(1)\quad \text{rot}\,\vec{H}=\vec{J}+j\omega\epsilon\,\vec{E}$

$(2)\quad \text{rot}\,\vec{E}=-j\omega\mu\,\vec{H}$

$(3)\quad \text{div}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon}$

$$\text{rot}(\text{rot}\,\vec{E})=-j\omega\mu\,\text{rot}\,\vec{H}=-j\omega\mu(\vec{J}+j\omega\epsilon\,\vec{E})=-j\omega\mu\,\vec{J}+\omega^2\mu\epsilon\,\vec{E}$$

$$\text{rot}(\text{rot}\,\vec{E})=\text{grad}(\text{div}\,\vec{E})-\Delta\vec{E}=\frac{1}{\epsilon}\,\text{grad}\,\rho-\Delta\vec{E}$$

Valovna enačba za $\vec{E}$

$$\Delta\vec{E}+\omega^2\mu\epsilon\,\vec{E}=j\omega\mu\,\vec{J}+\frac{1}{\epsilon}\,\text{grad}\,\rho$$

$$\text{rot}(\text{rot}\,\vec{H})=\text{rot}\,\vec{J}+j\omega\epsilon\,\text{rot}\,\vec{E}=\text{rot}\,\vec{J}+\omega^2\mu\epsilon\,\vec{H}$$

$$\text{rot}(\text{rot}\,\vec{H})=\text{grad}(\text{div}\,H)-\Delta\vec{H}=-\Delta\vec{H}$$

Valovna enačba za $\vec{H}$

$$\Delta\vec{H}+\omega^2\mu\epsilon\,\vec{H}=-\text{rot}\,\vec{J}$$

S pomočjo Maxwellovih enačb skušamo rešiti preprosto elektrotehnično nalogo: kakšni sta polji $\vec{E}$ oziroma $\vec{H}$, če poznamo izvore, torej vse tokove $\vec{J}$ in vse elektrine ρ ? Valovno enačbo za električno polje $\vec{E}$ dobimo tako, da drugo Maxwellovo enačbo (Faraday) odvajamo z $\text{rot}()$. Dobljeni $\text{rot}\,\vec{H}$ nato zamenjamo po prvi Maxwellovi enačbi (Ampère). Končno pretvorimo $\text{rot}(\text{rot}\,\vec{E})$ v vektorski Laplace $\Delta\vec{E}$ in manjkajoči $\text{div}\,\vec{E}$ nadomestimo s tretjo Maxwellovo enačbo (Gauss).

Valovno enačbo za magnetno polje $\vec{H}$ dobimo na podoben način. Najprej odvajamo Ampère z $\text{rot}()$. Dobljeni $\text{rot}\,\vec{E}$ nato zamenjamo po Faradayu. Končno pretvorimo $\text{rot}(\text{rot}\,\vec{H})$ v vektorski Laplace $\Delta\vec{H}$, saj je $\text{div}\,\vec{H}=0$ vedno nič.

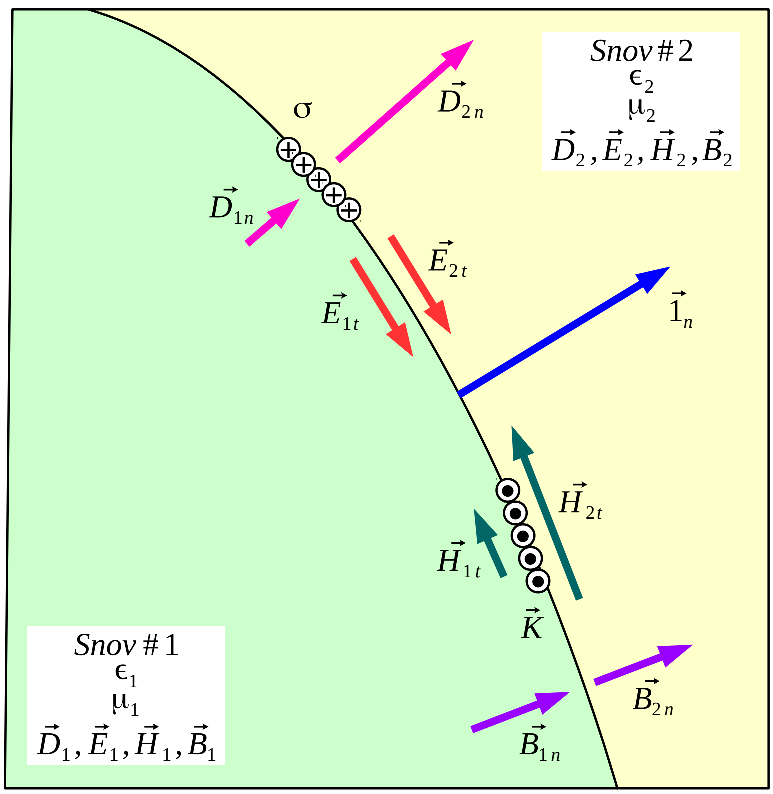
Obe valovni enačbi za $\vec{E}$ in $\vec{H}$ imata isto pomanjkljivost: na izvore na desni strani, tokove $\vec{J}$ in elektrine ρ delujejo diferencialne operacije, ki jih je običajno težko izračunati zaradi singularnosti. Računanje električnega in magnetnega polja neposredno preko Maxwellovih enačb iz tokov in elektrin ni najbolj ugodna pot. Obe valovni enačbi za $\vec{E}$ in $\vec{H}$ seveda s pridom uporabljamo v tistih delih prostora, kjer izvorov ni in je desna stran valovnih enačb enaka nič.

Končno v elektrotehničnih nalogah pogosto naletimo na primere, ko imamo v isti nalogi več različnih snovi. Vsaka snov sama zase je preprosta, torej linearna, homogena in izotropna. Meja dveh različnih snovi predstavlja singularnost, kjer ne smemo uporabljati Maxwellovih enačb v diferencialni obliki. Mejo dveh različnih snovi zato opišemo s prestopnimi pogoji povsem enako kot pri osnovah elektrotehnike:

Mejni pogoji

$\sigma \equiv \textit{ploskovna elektrina} \quad [\mathrm{As/m^2}]$

$\vec{K} \equiv \textit{ploskovni tok} \quad [\mathrm{A/m}]$



$$\vec{1}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{1}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$$

$$\vec{1}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$$

$$\vec{1}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

Tangencialno komponento izlušči vektorski produkt z normalo, normalno komponento pa skalarni produkt z normalo. Tangencialna komponenta $\vec{E}$ in normalna komponenta $\vec{B}$ vedno prestopata zvezno. Normalna komponenta $\vec{D}$ lahko ima skok, ki ustreza ploskovni elektrini σ, ki se je nabrala na meji dveh snovi. Ploskovni tok $\vec{K}$ na meji dveh snovi povzroči skok tangencialne komponente $\vec{H}$.

* * * * *