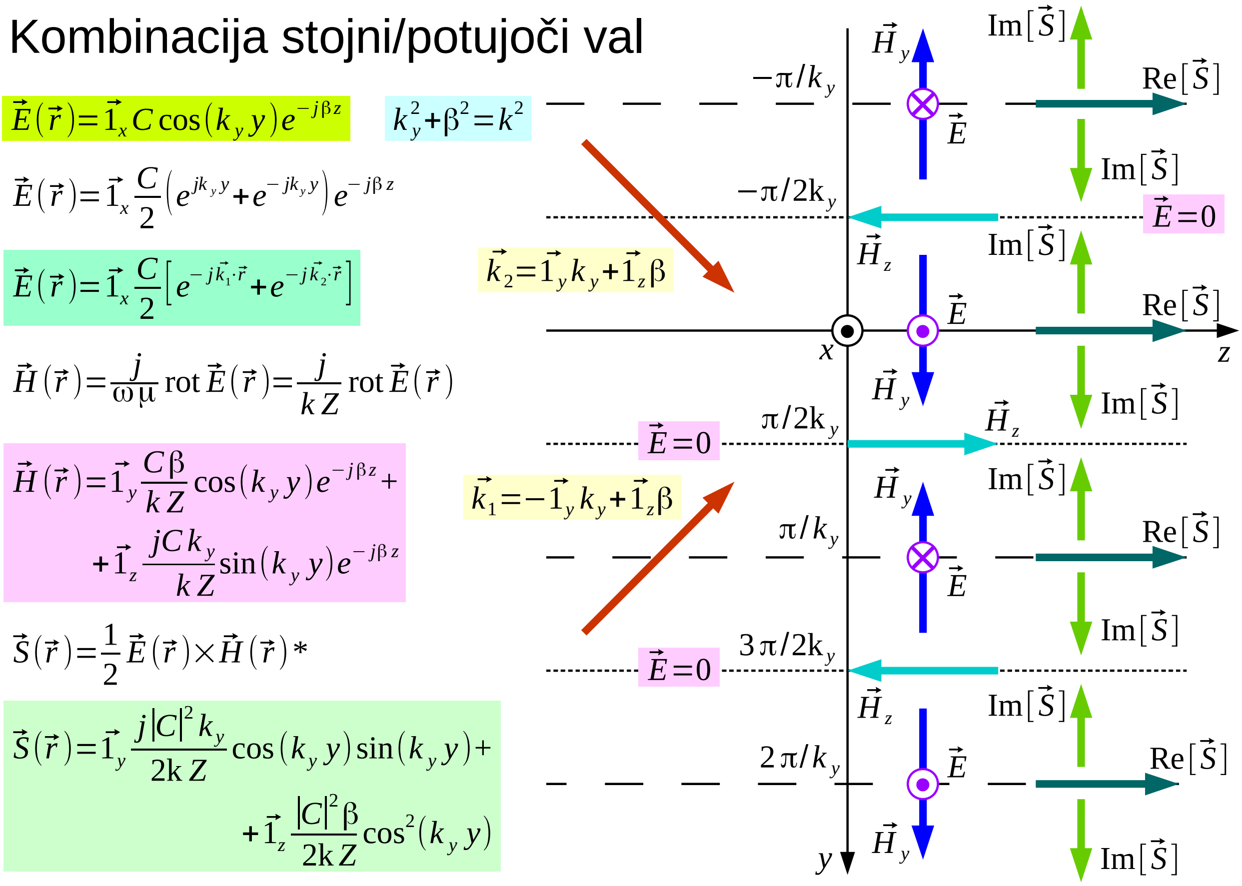
15. Koviniski valovod

Potujoči ravninski val opisuje pojav v neomejenem prostoru. Stojni val v votlinskem rezonatorju je sestavljen iz dveh ali več potujočih valov v omejenem prostoru, ki ga omejujejo okovinjene ploskve z ničelno $\vec{E}_t=0$ tangencialno komponento električnega polja. Končno lahko iz dveh ali več potujočih ravninskih valov sestavimo tudi kombinacijo stojnega vala v eni ali dveh dimenzijah ter potujočega vala v preostali dimenziji prostora.

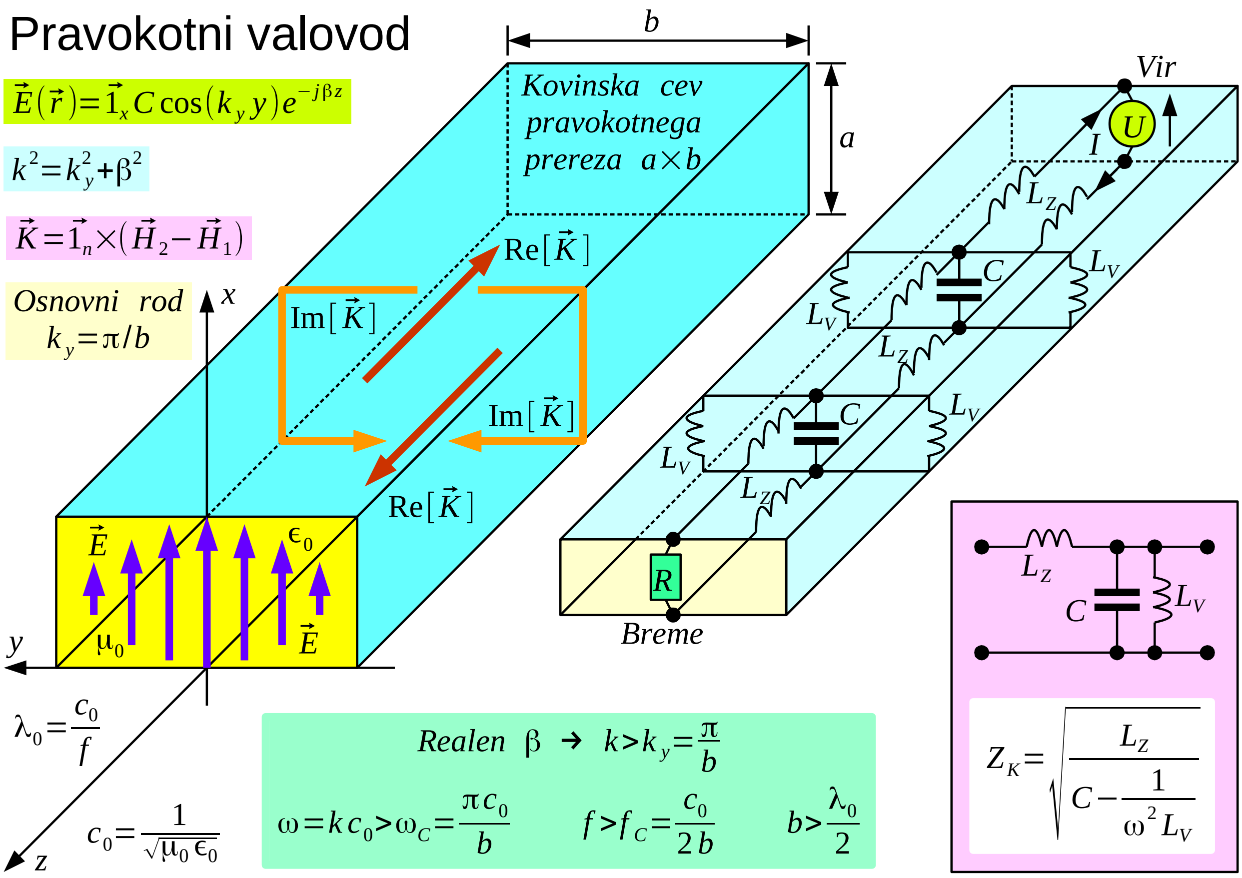
Preprost zgled kombinacije dveh potujočih ravninskih valov, ki ju opisujeta valovna vektorja $\vec{k}_1$ in $\vec{k}_2$, tvori stojni val v smeri osi y in napredujoči val v smeri osi z :



Skladno z razlago valov ima pripadajoči Poyntingov vektor $\vec{S}$ povsem delovno komponento $\vec{1}_z S_z=\mathrm{Re}[\vec{S}]$ v smeri potujočega vala in popolnoma jalovo komponento $\vec{1}_y S_y=j\,\mathrm{Im}[\vec{S}]$ v smeri stojnega vala. V koordinatnih smereh, v katerih je Poyntingov vektor $\vec{S}$ povsem jalov, lahko stojni val prostorsko omejimo, torej okovinimo ploskve, kjer je tangencialna električna poljska jakost $\vec{E}_t = 0$ enaka nič.

V smeri potujočega vala prostora ne omejujemo, pač pa uporabimo predlagano napravo, da vodi valovanje natančno v tej smeri. Zamisel se je pojavila že v drugi polovici 19. stoletja. Matematično nalogo je razrešil Lord Rayleigh in leta 1897 dokazal, da votla kovinska cev poljubnega prereza lahko vodi elektromagnetno valovanje v obliki različnih rodov. Šele z razvojem mikrovalovne tehnike in radarja v prvi polovici 20. stoletja postane kovinski valovod z eno samo votlo cevjo, bolj točno votlovod (nemško: Hohlleiter, angleško: hollow waveguide) praktično uporabna in koristna naprava.

Pri opisani kombinaciji stojni/potujoči val smemo okoviniti natančno določene ploskve, vzporedne z ravnino xz, ki ustrezajo vozlom stojnega vala električnega polja. Hkrati smemo okoviniti poljubno ploskev, vzporedno ravnini yz, saj je električno polje nanjo pravokotno. Z okovinjanjem dobimo kovinsko cev pravokotnega prereza $a \times b$, ki deluje kot pravokotni kovinski valovod, bolj točno votlovod:



Notranjost cevi je lahko popolnoma prazen prostor s permeabilnostjo

μ_0 in dielektirčnostjo ϵ_0 . Kovinski valovod lahko sicer izdelamo tudi z notranjostjo iz dielektrika z $\epsilon_r > 1$ oziroma iz feromagnetika z $\mu_r > 1$, vendar ima takšna naprava običajno slabše električne lastnosti oziroma višje izgube od pravega votlovoda. Notranjost pravokotnega valovoda zato kvečjemu zapolnimo z osušenim zrakom pod nadtlakom, da preprečimo vdor vlage. Prenos velikih moči zahteva izolacijski plin v notranjosti cevi, na primer žveplov heksafluorid SF_6, ki ima višjo električno prebojno trdnost od zraka.

Prestopni pogoji za magnetno polje $\vec{H}$ zahtevajo ploskovne tokove $\vec{K}$ v vseh okovinjenih ploskvah, ko zunaj cevi ni elektromagnetnega polja. Ploskovni tokovi so povsem jalovi $\vec{1}_y K_y = j\,\mathrm{Im}[\vec{K}]$ v smeri stojnega vala in povsem delovni $\vec{1}_z K_z = \mathrm{Re}[\vec{K}]$ v smeri potujočega vala. Ploskovni tok nam tudi pove, kam priključiti izmenični vir, kam breme in kakšno je pričakovano električno obnašanje opisane naprave?

Gornja in spodnja, torej široki stranici b opisanega valovoda se obnašata kot trakasti dvovod s porazdeljeno zaporedno induktivnostjo L_z in porazdeljeno medsebojno kapacitivnostjo C . Bočni oziroma ozki stranici a se obnašata kot dodatna porazdeljena vzporedna kapacitivnost L_v . Pravokotni votlovod lahko torej opišemo z nadomestnim vezjem, še bolj natančno z zaporedno vezavo velikega števila takšnih vezij za diferencialno kratke odseke votlovoda.

Iz nadomestnega električnega vezja ugotovimo, da je karakteristična impedanca Z_k povsem reaktivna (jalova) pri nizkih frekvencah, postane pri določeni frekvenci $\omega_C = 1/\sqrt{L_V C}$ neskončno velika in od tam naprej je pri visokih frekvencah povsem delovna (realna). Pravokotni kovinski valovod se torej obnaša kot visokoprepustno frekvenčno sito.

Do enakovredne ugotovitve pridemo iz zapisa elektromagnetnega polja v pravokotnem kovinskem valovodu. Če naj naprava vodi valovanje, mora biti fazna konstanta $\beta = \sqrt{k^2 - k_y^2}$ povsem realna. Torej mora veljati $k > k_y$ oziroma $\omega > \omega_C$ oziroma $f > f_C$, kjer indeks C pomeni frekvenčno mejo, angleško: cutoff. Frekvenčno mejo si najlažje zapomnimo iz pogoja za širšo stranico valovoda $b > \lambda_0/2$, ki mora biti širša od polovice valovne dolžine v neomejenem prostoru z enakimi snovnimi lastnostmi, kot jih ima notranjost (običajno votle) cevi.

Električno nadomestno vezje se izogiblje izmeram resnične naprave. Hitrost valovanja lahko torej določimo samo iz celovitega zapisa elektromagnetnega polja. Električno polje zapišemo v časovnem prostoru $\vec{E}(\vec{r},t)$. Hitrost valovanja, ki vsebuje eno samo frekvenco ω , dobimo iz pogoja za fazo. Če jezdimo na valu v isti točki, se faza ne sme spreminjati. Rezultat je na prvi pogled presenetljiv, fazna hitrost (angleško: phase velocity) $v_f > c_0$ je vedno večja od svetlobne hitrosti za katerikoli rod m nad svojo pripadajočo frekvenčno mejo $f > f_{0m}$:

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{1}_x C\cos(k_y y)e^{-j\beta z}$$

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{1}_x \frac{C}{2}\left[e^{-j\vec{k}_1\cdot\vec{r}}+e^{-j\vec{k}_2\cdot\vec{r}}\right]$$

Rodovi TE_{0m}

$$k_y=m\cdot\frac{\pi}{b} \qquad m=1,2,3,4,5...$$

$$\beta=\sqrt{k^2-k_y^2}$$

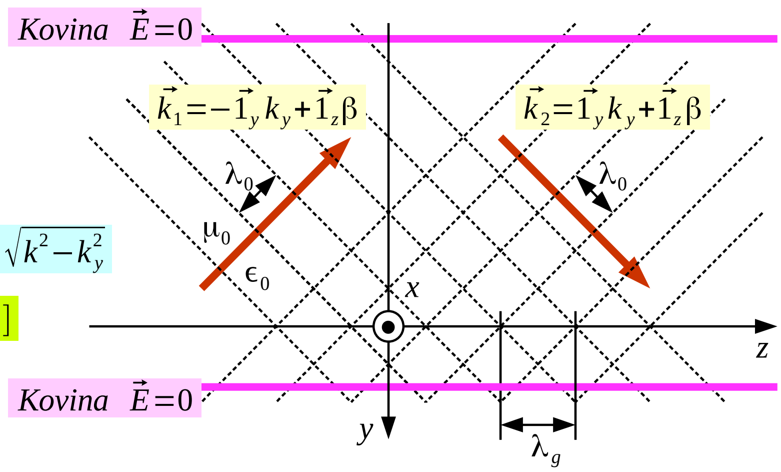
$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{1}_x\cos(k_y y)\mathrm{Re}\left[C e^{j(\omega t-\beta z)}\right]$$

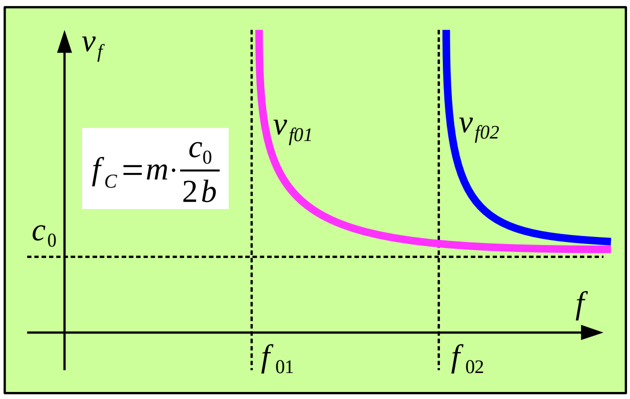
Jezdimo na valu:
Faza $\omega t-\beta z=konst.$

$$\frac{d}{dt}(\omega t-\beta z)=0=\omega-\beta\frac{dz}{dt}=\omega-\beta v_f$$

Fazna hitrost $v_f=\dfrac{\omega}{\beta}=\dfrac{c_0}{\sqrt{1-\dfrac{k_y^2}{k^2}}}=\dfrac{c_0}{\sqrt{1-\dfrac{f_C^2}{f^2}}}>c_0$

Valovodna valovna dolžina $\lambda_g=\dfrac{v_f}{f}=\dfrac{\lambda_0}{\sqrt{1-\dfrac{f_C^2}{f^2}}}>\lambda_0$





Fazna hitrost

Razlaga postane nazornejša, če ne okovinimo dveh sosednjih vozlov električnega polja, pač pa izberemo okovinjeni ploskvi tako, da je med njima m hrbtov stojnega vala električne poljske jakosti. Na gornji sliki ravninskih valov $\vec{k}_1$ in $\vec{k}_2$ ima stojni val $m=9$ hrbtov, kar ustreza rodu valovanja TE_{09} med okovinjenima ravninama. Valovne fronte vsakega ravninskega vala so pravokotne na pripadajoči valovni vektor in so med sabo razmaknjene za valovno dolžino λ_0 v praznem prostoru.

Navidezna valovna dolžina v valovodu λ_g (angleško: lambda guided) je razdalja med projekcijama dveh sosednjih valovnih front na os z , zato je nujno večja $\lambda_g > \lambda_0$ od valovne dolžine v praznem prostoru. Projekcija $\lambda_g = v_f / f$ je lahko zelo velika in postane celo neskončna $\lambda_g \rightarrow \infty$ tik ob mejni frekvenci $f \approx f_{0m}$ pripadajočega rodu valovanja. Z višanjem frekvence se fazna hitrost kateregakoli rodu valovanja znižuje in približuje $v_f \rightarrow c_0$ hitrosti svetlobe v praznem prostoru.

Opisani pojavi niso v nasprotju z relativistiko. Relativistika sicer zahteva, da energija niti informacija ne moreta potovati s hitrostjo, večjo od svetlobe. Fazno hitrost v_f smo izračunali za eno samo frekvenco ω z neskončno ozkim spektrom, takšen signal zato ne prenaša nobene informacije. Valovna dolžina λ_g v valovodu je samo projekcija, ki je lahko poljubno velika.

Hitrost potovanja energije oziroma informacije imenujemo skupinska hitrost v_g (angleško: group velocity). Določimo jo iz hitrosti potovanja ovojnice signala, ki vsebuje najmanj dve različni frekvenci ω_1 in ω_2 :

Dvotonsko krmiljenje $\omega_A, \omega_B \gg \omega_A - \omega_B = \Delta\omega$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{1}_x \cos(k_y y)\,\mathrm{Re}\left[A e^{j(\omega_A t - \beta_A z)} + B e^{j(\omega_B t - \beta_B z)}\right]$$

$\varphi_A = \omega_A t - \beta_A z$ $\qquad \langle\varphi\rangle = (\varphi_A + \varphi_B)/2 \;\; ...hiter!$

$\varphi_B = \omega_B t - \beta_B z$ $\qquad \Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B \;\; ...počasen!$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{1}_x \cos(k_y y)\,\mathrm{Re}\Big[e^{j\langle\varphi\rangle} \underbrace{\left(A e^{j\Delta\varphi/2} + B e^{-j\Delta\varphi/2}\right)}_{Ovojnica}\Big]$$

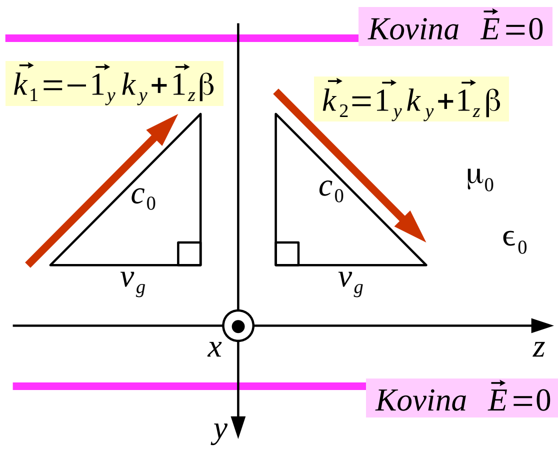
Jezdimo na ovojnici: $\Delta\varphi = \Delta\omega\, t - \Delta\beta\, z = konst.$

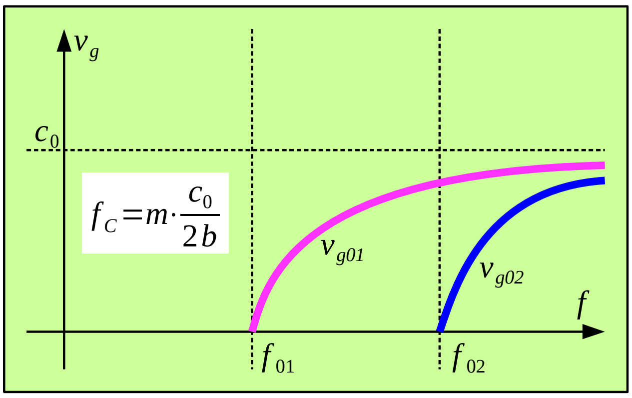
$$\frac{d}{dt}(\Delta\omega\, t - \Delta\beta\, z) = 0 = \Delta\omega - \Delta\beta \frac{dz}{dt}$$

Skupinska hitrost $v_g = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta}$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\sqrt{k^2 - k_y^2} = \frac{2\omega/c_0^2}{2\sqrt{k^2 - k_y^2}} = \frac{1}{c_0\sqrt{1 - \frac{k_y^2}{k^2}}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c_0\sqrt{1 - \frac{f_C^2}{f^2}} < c_0$$





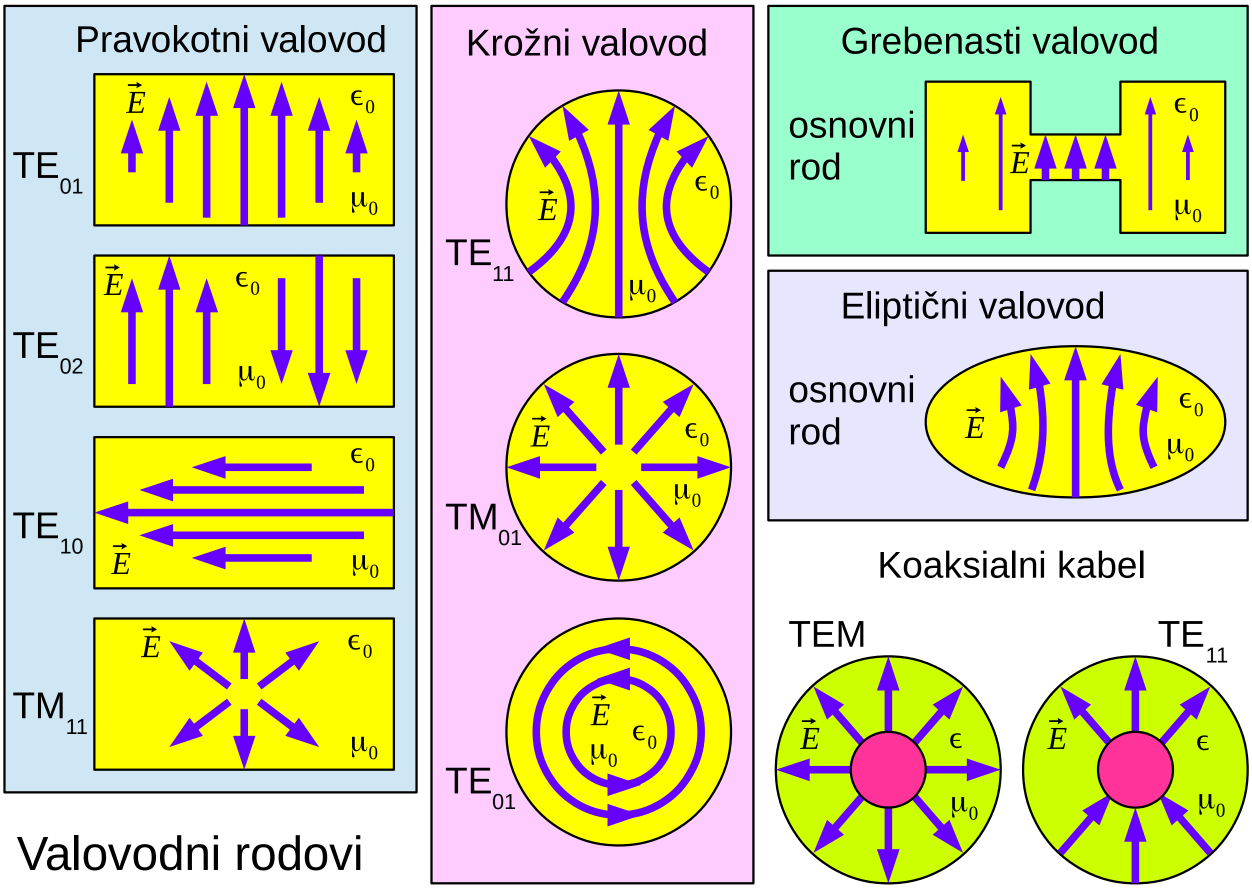
Skupinska hitrost

Električno polje $\vec{E}(\vec{r},t)$ dvotonskega krmiljenja zapišemo v časovnem prostoru. Zapis razstavimo na hitri člen in počasne člene. Počasni členi nihajo s polovico razlike frekvenc $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, ki je lahko poljubno majhna, torej poljubno počasen pojav. Skupinsko hitrost v_g določimo tako, da jezdimo na ovojnici, ki jo določajo počasni členi. Skupinska hitrost

$v_g < c_0$ je vedno manjša od svetlobne hitrosti ravninskih valov v notranjosti votlovoda, kar je povsem v skladu z relativistiko.

Za skupinsko hitrost v_g obstaja še preprostejša razlaga. Ravninski val $\vec{k}_1$ zadene ob kovinsko steno in se pri odboju pretvori v ravninski val $\vec{k}_2$. Slednji zadene ob drugo kovinsko steno in se tam pretvori nazaj v izvorni val $\vec{k}_1$. V pravokotnem valovodu torej elektromagnetno valovanje cikcaka med kovinskima stenama. Projekcija svetlobne hitrosti c_0 na os z valov $\vec{k}_1$ ali $\vec{k}_2$ je natančno skupinska hitrost v_g .

Tik ob mejni frekvenci $f \approx f_{0\mathrm{m}}$ opazovanega rodu je cikcak zelo gost. Večina elektromagnetnega polja v votlovodu daje energijo stojnega vala, moč napredujočega vala pa je razmeroma majhna. Z višanjem frekvence se cikcak redči. Energija stojnega vala se z višanjem frekvence niža, kar opisuje člen k_y/k jalove komponente gostote pretoka moči $\mathrm{Im}[\vec{S}]$. Moč napredujočega vala se z višanjem frekvence veča, kar opisuje člen β/k delovne komponente gostote pretoka moči $\mathrm{Re}[\vec{S}]$.


Pravokotni valovod
TE01
TE02
TE10
TM11
Krožni valovod
TE11
TM01
TE01
Grebenasti valovod
osnovni rod
Eliptični valovod
osnovni rod
Koaksialni kabel
TEM
TE11
$\vec{E}$
ϵ_0
μ_0
ϵ
Valovodni rodovi

Valjne koordinate (ρ, φ, z)

Napredujoči val v smeri z: $\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \operatorname{rot} \vec{H}$$

Brez izvorov $\vec{J} = 0$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{1}_\rho & \rho \vec{1}_\varphi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & -j\beta \\ H_\rho & \rho H_\varphi & H_z \end{vmatrix}$$

$$E_\rho = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + j\beta H_\varphi \right] \rightarrow E_\rho - \frac{\beta}{\omega\epsilon} H_\varphi = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}$$

$$E_\varphi = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[-\frac{\partial H_z}{\partial \rho} - j\beta H_\rho \right] \rightarrow E_\varphi + \frac{\beta}{\omega\epsilon} H_\rho = \frac{j}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \operatorname{rot} \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{1}_\rho & \rho \vec{1}_\varphi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & -j\beta \\ E_\rho & \rho E_\varphi & E_z \end{vmatrix}$$

$$H_\rho = \frac{j}{\omega\mu} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + j\beta E_\varphi \right] \rightarrow H_\rho + \frac{\beta}{\omega\mu} E_\varphi = \frac{j}{\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}$$

$$H_\varphi = \frac{j}{\omega\mu} \left[-\frac{\partial E_z}{\partial \rho} - j\beta E_\rho \right] \rightarrow H_\varphi - \frac{\beta}{\omega\mu} E_\rho = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}$$

$$\omega^2 \mu \epsilon = k^2$$

$$E_\rho = \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\omega\mu}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right] \qquad H_\rho = \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left[-\frac{\omega\epsilon}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right]$$

$$E_\varphi = \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left[\frac{\beta}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right] \qquad H_\varphi = \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left[\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right]$$

Prečne komponente polja iz vzdolžnih

* * * * *