16. Valovanje v izgubni snovi

Ravninski val oziroma žarek valovanja opisujejo valovne enačbe v prostoru (snovi) brez izvorov, torej brez tokov $\vec{J}(\vec{r})=0$ in brez elektrin $\rho(\vec{r})=0$. V snovi brez izvorov se lahko izognemo potencialom in neposredno rešujemo valovni enačbi za električno polje oziroma magnetno polje:

$$\Delta\vec{E}(\vec{r})+\omega^2\mu\epsilon\vec{E}(\vec{r})=0$$

$$\Delta\vec{H}(\vec{r})+\omega^2\mu\epsilon\vec{H}(\vec{r})=0$$

Pri tem običajno zapišemo konstanto $\omega^2\mu\epsilon=k^2$ z valovnim številom. V snovi z izgubami tokovi $\vec{J}(\vec{r})\neq 0$ niso enaki nič. Povezavo med gostoto električnega toka in električno poljsko jakostjo $\vec{J}(\vec{r})=\gamma\vec{E}(\vec{r})$ določa specifična prevodnost izgubne snovi.

V splošnem primeru neizotropne in nehomogene izgubne snovi je $\gamma(\vec{r})$ tenzorska funkcija koordinat. Velika večina snovi je izotropnih in homogenih. V slednjih je specifična prevodnost γ preprosta skalarna konstanta. Ampèrejev zakon v takšni preprosti snovi s skalarnima konstantama γ in ϵ lahko zapišemo:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r})=\gamma\vec{E}(\vec{r})+j\omega\epsilon\vec{E}(\vec{r})=j\omega\epsilon_0\left[\epsilon_r+\frac{\gamma}{j\omega\epsilon_0}\right]\vec{E}(\vec{r})=j\omega\epsilon'\vec{E}(\vec{r})$$

kjer je navidezna dielektričnost $\epsilon'=\epsilon_0\left[\epsilon_r+\frac{\gamma}{j\omega\epsilon_0}\right]$ kompleksno število!

Valovni enačbi za izotropno in homegeno snov z izgubami se tedaj glasita:

$$\Delta\vec{E}(\vec{r})+\omega^2\mu\epsilon'\vec{E}(\vec{r})=0$$

$$\Delta\vec{H}(\vec{r})+\omega^2\mu\epsilon'\vec{H}(\vec{r})=0$$

Valovni enačbi lahko načeloma rešujemo na povsem enak način kot v snovi brez izgub z edino razliko, da v konstanti $\omega^2\mu\epsilon'=k^2$ nastopa kompleksno valovno število:

$$k=\omega\sqrt{\mu\epsilon'}=\omega\sqrt{\mu\epsilon_0\left[\epsilon_r+\frac{\gamma}{j\omega\epsilon_0}\right]}$$

$$k=\sqrt{\omega^2\mu\epsilon-j\omega\mu\gamma}=\beta-j\alpha$$

Tri-dimenzijsko valovanje v izgubni snovi ima kompleksno valovno število $k=\beta-j\alpha$ povsem enako kot eno-dimenzijski vod z izgubami. Realni del valovnega števila je tudi v tem primeru fazna konstanta $\beta=\mathrm{Re}[k]$ z merskimi enotami $\mathrm{rd/m}$, ki ima povsem enak fizikalni pomen kot v brezizgubni snovi. Imaginarni del $\alpha=-\mathrm{Im}[k]$ opisuje slabljenje snovi na enoto dolžine v smeri potovanja valovanja v logaritemskih merskih enotah $\mathrm{Np/m}$ (Nepri na meter).

Rešitev valovne enačbe za napredujoči val v izgubni snovi v smeri $\vec{1}_k$ zapišemo s kompleksnim valovnim vektorjem $\vec{k}=\vec{1}_k k=\vec{1}_k(\beta-j\alpha)$:

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=\vec{E}_0 e^{-j\beta\vec{1}_k\cdot\vec{r}}e^{-\alpha\vec{1}_k\cdot\vec{r}}$$

Eksponentna funkcija imaginarnega argumenta $-j\beta\vec{1}_k\cdot\vec{r}$ opisuje zakasnitev faze v smeri potovanja valovanja. Eksponentna funkcija realnega argumenta $-\alpha\vec{1}_k\cdot\vec{r}$ opisuje slabljenje v smeri potovanja valovanja. Vektorska konstanta $\vec{E}_0$ ustreza polju v koordinatnem izhodišču.

Primerjava lastnosti različnih snovi pokaže, da za fazno konstanto $\beta=\mathrm{Re}[k]$ in slabljenje $\alpha=-\mathrm{Im}[k]$ smemo uporabiti približke:

Snov	Baker (kovina) Cu	Morska voda $\mathrm{H_2O+NaCl}$	Kremenovo steklo $\mathrm{SiO_2}$
Relativna dielektričnost	$\epsilon_r\approx 1$	$\epsilon_r=80$	$\epsilon_r=3.75$
Prevodnost $\gamma[\mathrm{S/m}]$	$\gamma=56\cdot 10^6\,\mathrm{S/m}$	$\gamma=5\,\mathrm{S/m}$	$\gamma<10^{-18}\,\mathrm{S/m}$
Mejna frekvenca $\gamma=\omega\epsilon=2\pi f\epsilon$	$f\approx 10^{18}\,\mathrm{Hz}$ $\lambda\approx 0.3\,\mathrm{nm}$	$f=1.125\cdot 10^9\,\mathrm{Hz}$ $f=1.125\,\mathrm{GHz}$	$f<4.8\cdot 10^{-9}\,\mathrm{Hz}$ $T=1/f>6.6\,\mathrm{let}$
Lastnost	Dober prevodnik $\beta\approx\alpha$	Vmesni primer $\beta>\alpha>0$	Dober izolator $\beta\gg\alpha\rightarrow 0$

Vse kovine so dobri prevodniki. Mejna frekvenca, kjer je prevodni tok $|\vec{J}(\vec{r})| \approx |\partial \vec{D}(\vec{r})/\partial t|$ istega velikostnega razreda kot poljski tok, je v področju trdih rentgenskih žarkov oziroma "gama" žarkov. Pri nižjih frekvencah je poljski tok običajno zanemarljiv $|\partial \vec{D}(\vec{r})/\partial t| \ll |\vec{J}(\vec{r})|$ oziroma $\gamma \gg \omega \epsilon$ oziroma $\omega \mu \gamma \gg \omega^2 \mu \epsilon$, da relativne dielektričnosti kovine ϵ_r sploh ne moremo določiti. Člen $\omega^2 \mu \epsilon$ smemo tedaj zanemariti v izračunu fazne konstante in slabljenja:

$$k = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - j \omega \mu \gamma} \approx \sqrt{-j \omega \mu \gamma} = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu \gamma}$$

$$\beta \approx \alpha \approx \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}}$$

V dielektrikih je prevodni tok $|\vec{J}(\vec{r})| \ll |\partial \vec{D}(\vec{r})/\partial t|$ običajno dosti manjši od poljskega toka, kar pomeni $\gamma \ll \omega \epsilon$ oziroma $\omega \mu \gamma \ll \omega^2 \mu \epsilon$. V dielektrikih je perioda $T = 1/f$ oziroma obratna vrednost mejne frekvence v velikostnem razredu nekaj dni ali nekaj let. V dobrem dielektriku smemo izračun fazne konstante in slabljenja poenostaviti v:

$$k = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - j \omega \mu \gamma} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon \left[1 - \frac{j\gamma}{\omega \epsilon}\right]} \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 - j \frac{\gamma}{2 \omega \epsilon}\right]$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon} \qquad \alpha \approx \frac{\gamma}{2 \omega \epsilon} \beta = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ll \beta$$

Za vmesni primer, ko sta prevodni in poljski tok v istem velikostnem razredu in velja $\gamma \approx \omega \epsilon$, ne moremo uporabljati nobenih približkov. Izračunati moramo kvadratni koren kompleksnega argumenta:

$$\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - j \omega \mu \gamma} = \beta - j \alpha$$

$$\omega^2 \mu \epsilon - j \omega \mu \gamma = \beta^2 - \alpha^2 - j 2 \alpha \beta$$

$$\omega^2 \mu \epsilon = \beta^2 - \alpha^2 \qquad \omega \mu \gamma = 2 \alpha \beta$$

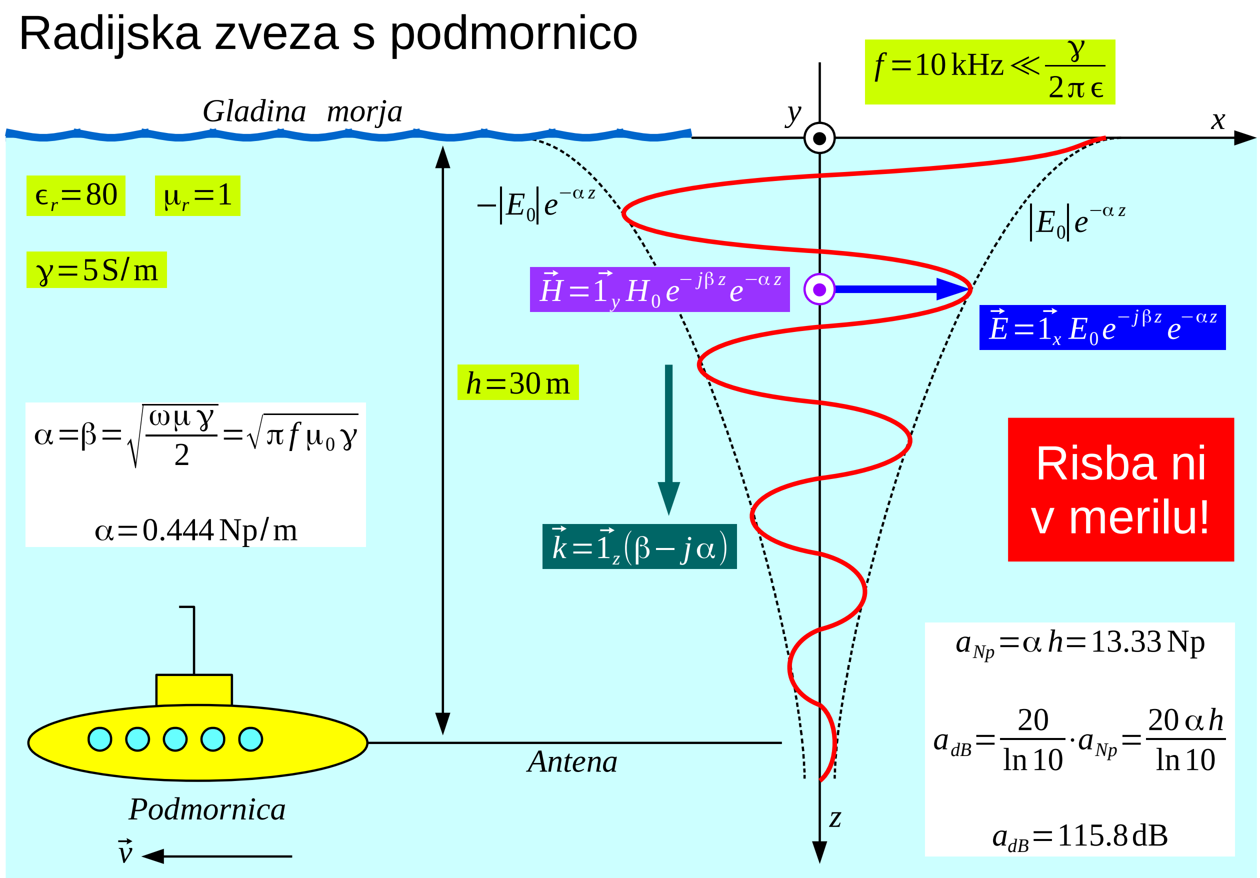
$$\alpha = \frac{\omega \mu \gamma}{2 \beta} \qquad \omega^2 \mu \epsilon = \beta^2 - \left(\frac{\omega \mu \gamma}{2 \beta}\right)^2$$

$$\beta^4-\omega^2\mu\epsilon\beta^2-\omega^2\mu^2\gamma^2/4=0$$

$$\beta=\pm\sqrt{\frac{\omega^2\mu\epsilon\pm\sqrt{\omega^4\mu^2\epsilon^2+\omega^2\mu^2\gamma^2}}{2}}$$

Pri obeh kvadratnih korenih vzamemo pozitiven predznak. Pozitiven predznak notranjega korena daje realno fazno konstanto β . Pozitiven predznak zunanjega korena daje rešitev za napredujoči val. Slabljenje α določimo iz izračunane fazne konstante. Vedno velja $\beta>\alpha>0$.

Na srečo tak kompliciran izračun običajno ni potreben niti v primeru morske vode. Kot zgled si oglejmo dodatno slabljenje, ki ga vnaša morska voda pri radijski zvezi s podmornico. Frekvenca zveze je tako nizka, da se morska voda obnaša kot dober prevodnik:

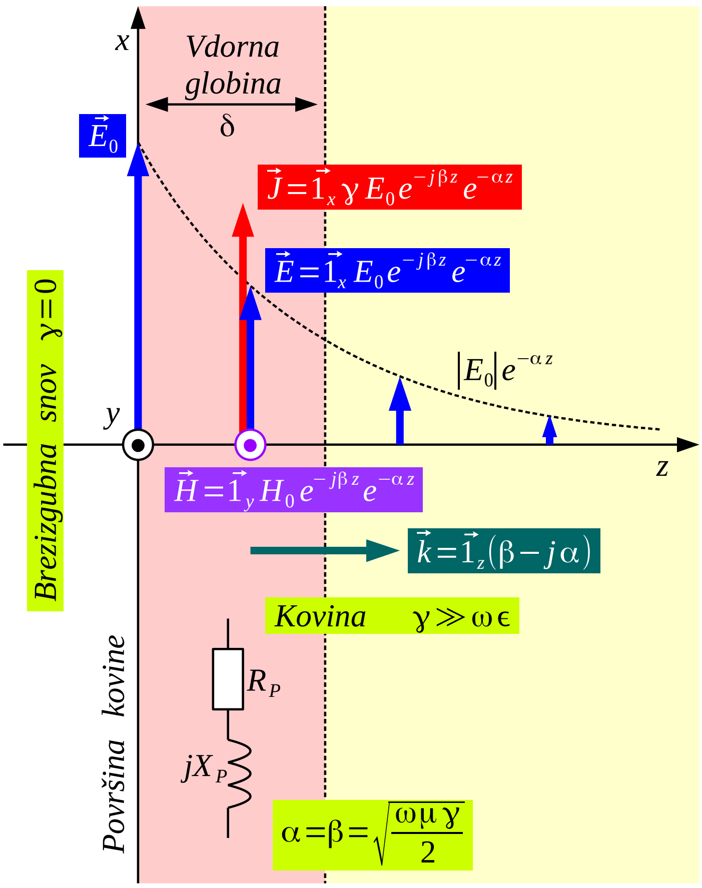


Ker je slabljenje morske vode zelo veliko, se za radijske zveze s podmornicami uporabljajo zelo nizke frekvence $f=10\,\mathrm{kHz}$ in manj. Antena je vodoravna žica, ki jo podmornica vleče za sabo. Zaradi visoke dielektrične konstante $\epsilon_r\gg1$ in visokega lomnega količnika morske vode $n=\sqrt{\epsilon_r}$ v področju radijskih valov se radijsko valovanje na gladini lomi skoraj navpično

$\Theta_L \rightarrow 0$ v globino. Kljub nizki frekvenci $f=10\,\mathrm{kHz}$ znaša dodatno slabljenje morske vode kar $a_{dB}=115.8\,\mathrm{dB}$ do globine komaj $h=30\,\mathrm{m}$!

Pozor, slabljeno valovanje na sliki ni narisano v merilu! Fazna konstanta β je namenoma narisana približno dvakrat večja, slabljenje α pa dosti manjše kot iz izračuna. Risba torej velja za primer $\beta \gg \alpha$. V resničnem opisanem primeru zveze s podmornico $\beta \approx \alpha$ bi bila faza valovanja komaj vidna pod hitro usihajočo eksponentno krivuljo!

Dosti bolj pomemben primer od radijske zveze s podmornico je vdor elektromagnetnega valovanja v kovino. Tok v kovini $\vec{J}(\vec{r})=\gamma \vec{E}(\vec{r})$ poganja električno polje. Kjer ni električnega polja, tam ni toka. Pri kovinah je slabljenje α zelo visoko. Sredi kosa kovine skoraj ni toka. Izmenično električno polje lahko vzbudimo kvečjemu blizu površine kovine z nekim zunanjim virom. Izmenični tokovi zato obstajajo samo tik pod površino kovin. Opisani pojav izriva izmeničnega električnega toka proti površini kovine imenujemo kožni pojav (angleško: skin effect):



$$\delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} \equiv Vdorna\ \ globina$$

$$\vec{K}=\int_0^\infty \vec{J}(\vec{r})\,dz \equiv Ploskovni\ \ tok$$

$$\vec{K}=\int_0^\infty \vec{1}_x \gamma E_0 e^{(-j\beta-\alpha)z}\,dz=\vec{1}_x \frac{\gamma}{j\beta+\alpha} E_0$$

$$\vec{E}_0=Z_P \vec{K}$$

$$Z_P=\frac{E_0}{|\vec{K}|}=\frac{\alpha+j\beta}{\gamma} \equiv Impedanca\ \ plasti$$

$$Z_P=R_P+jX_P$$

$$R_P=\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{1}{\delta\gamma}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \equiv Upornost\ \ plasti$$

$$X_P=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{1}{\delta\gamma}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}=\omega L_P$$

Kožni pojav v kovini

Pod površino kovine polje in tok eksponentno upadata. Debelino kože definiramo kot $\delta=1/\alpha$ obratno vrednost slabljenja. Na globini, ki ustreza debelini kože, tedaj polje in tok upadeta na $1/e$ začetne vrednosti na površini kovine.

Ko je debelina kože δ majhna, je smiselno seštevanje (integracija) prostorske gostote toka $\vec{J}(\vec{r})$ po globini z v skupen ploskovni tok $\vec{K}$ v tanki plasti. Integracija daje popolnoma enak rezultat, kot bi ga dobili s konstantnim poljem $\vec{E}_0$ v tanki plasti debeline δ .

Tanki plasti lahko pripišemo impedanco plasti Z_P (impedanca kvadratka). Impedanca plasti $Z_P = R_P + jX_P$ ima delovno in jalovo komponento. Delovna komponenta R_P je upornost tanke plasti. Jalova komponenta $X_P = \omega L_P$ opisuje notranjo induktivnost tanke plasti.

Kot praktičen zgled si oglejmo vdorno globino δ in plastno upornost R_P običajnih prevodnikov (baker Cu) in feromagnetikov (železo Fe). Vdorna globina v baker in druge dobre prevodnike (srebro, aluminij) ni zanemarljiva niti pri omrežni frekvenci $f = 50\,\mathrm{Hz}$, kjer znaša približno centimeter. Kot debelejši vodniki se celo v energetiki uporabljajo bakrene cevi, saj v sredini cevi itak ni toka.

Kovina	Baker Cu $\gamma \approx 56 \cdot 10^6 \mathrm{S/m}$ $\mu_r \approx 1$		Železo Fe $\gamma \approx 8 \cdot 10^6 \mathrm{S/m}$ $\mu_r \approx 10^4$	
Frekenca f	Vdorna globina δ	Upornost plasti R_P	Vdorna globina δ	Upornost plasti R_P
$1\,\mathrm{Hz}$	$67.3\,\mathrm{mm}$	$0.266\,\mu\Omega$	$1.78\,\mathrm{mm}$	$70.3\,\mu\Omega$
$100\,\mathrm{Hz}$	$6.73\,\mathrm{mm}$	$2.66\,\mu\Omega$	$0.178\,\mathrm{mm}$	$703\,\mu\Omega$
$10\,\mathrm{kHz}$	$0.673\,\mathrm{mm}$	$26.6\,\mu\Omega$	$17.8\,\mu\mathrm{m}$	$7.03\,\mathrm{m}\Omega$
$1\,\mathrm{MHz}$	$67.3\,\mu\mathrm{m}$	$266\,\mu\Omega$	$1.78\,\mu\mathrm{m}$	$70.3\,\mathrm{m}\Omega$
$100\,\mathrm{MHz}$	$6.73\,\mu\mathrm{m}$	$2.66\,\mathrm{m}\Omega$	$0.178\,\mu\mathrm{m}$	$703\,\mathrm{m}\Omega$
$10\,\mathrm{GHz}$	$0.673\,\mu\mathrm{m}$	$26.6\,\mathrm{m}\Omega$	$17.8\,\mathrm{nm}$	$7.03\,\Omega$
$1\,\mathrm{THz}$	$67.3\,\mathrm{nm}$	$266\,\mathrm{m}\Omega$	$1.78\,\mathrm{nm}$	$70.3\,\Omega$
$100\,\mathrm{THz}$	$6.73\,\mathrm{nm}$?	$2.66\,\Omega$?	$0.178\,\mathrm{nm}$?	$703\,\Omega$?

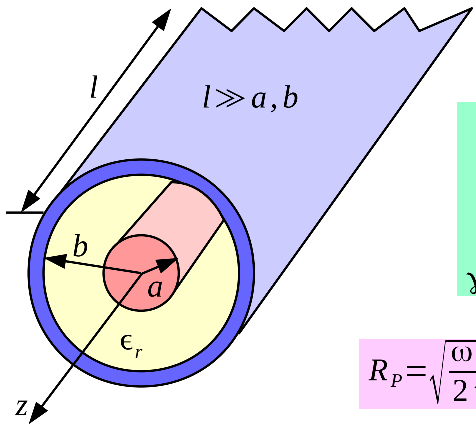
V področju radijskih frekvenc okoli $f = 100\,\mathrm{MHz}$ znaša vdorna globina v baker komaj nekaj mikrometrov. V večjem delu preseka vodnika sploh ni nobenega toka. Upornost vodnikov tedaj narašča sorazmerno s korenom frekvence. Izgube koaksialnega kabla in drugih TEM vodov prav tako naraščajo sorazmerno s korenom frekvence. Hkrati se notranja induktivnost vodnikov zmanjšuje obratno sorazmerno korenu frekvence. Na frekvencah nad $f>1\,\mathrm{MHz}$ postane notranja induktivnost vodnikov zanemarljivo majhna v primerjavi z induktivnostjo prostora (snovi) med vodniki.

Pri svetlobnih frekvencah nad $f>100\,\mathrm{THz}$ prevodnost γ in permeabilnost μ kovin že močno odstopata od vrednosti pri nizkih frekvencah. Prevodnost bakra in drugih kovin začne upadati. Izračunane vrednosti v tabeli so vprašljive? Kovinska zrcala so v optiki slaba zrcala, od njih se odbije le del vpadne svetlobe. Hrapavost površine sicer podaljšuje pot toka po tanki koži in povečuje izgube že na mikrovalovnih frekvencah nad $f>1\,\mathrm{GHz}$. Mikrovalovna vezja zato zahtevajo zrcalno gladke površine vodnikov.

Prevodnost γ in permeabilnost μ železa Fe sta močno odvisni od natančne zlitine in obdelave. Tabela je izračunana za relativno permeabilnost $\mu_r=10^4$ in prevodnost, ki je sedemkrat manjša od prevodnosti bakra. V tem primeru je vdorna globina δ v železo 38-krat ($\sqrt{10^4/7}$) manjša od vdorne globine v baker, plastna upornost R_P železa pa 265-krat ($\sqrt{10^4\cdot 7}$) višja od plastne upornosti bakra.

Zaradi tanke vdorne globine δ in visoke plastne upornosti R_P vnašajo železni vodniki velike izgube že pri omrežni frekvenci $f=50\,\mathrm{Hz}$. Še višje izgube železa omogočajo delovanje indukcijskega kuhalnika pri frekvenci okoli $f\approx 25\,\mathrm{kHz}$. Goli železni vodniki so povsem neuporabni za telekomunikacijske vode, tuljave, rezonatorje in antene. Železne vodnike pogosto prevlečemo s tanko plastjo dobrega prevodnika, da v isti napravi združimo mehansko trdnost železa in odlične električne lastnosti tanke kože srebra Ag ali drugega dobrega prevodnika.

Slabljenje koaksialnega kabla



$$a = 2\,\mathrm{mm}$$
$$b = 7\,\mathrm{mm}$$
$$\epsilon_r = 2.2$$
$$f = 100\,\mathrm{MHz}$$
$$\gamma = 56 \cdot 10^6\,\mathrm{S/m}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} \approx 6.73\,\mu\mathrm{m} \ll a, b$$

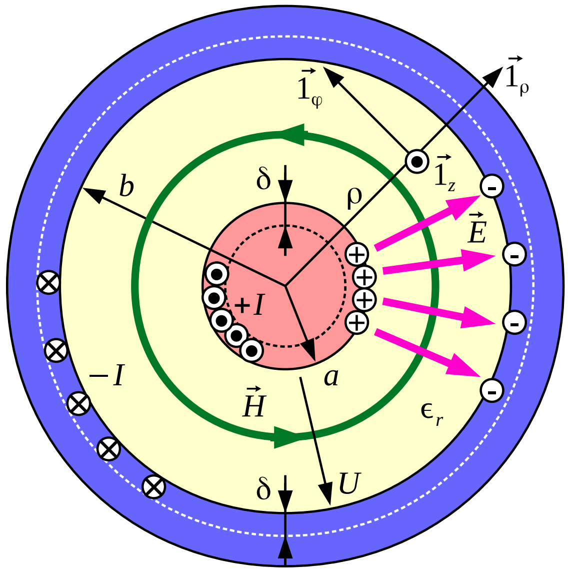
$$R_P = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}} \approx 2.66\,\mathrm{m}\Omega$$

$$R/l = \frac{R_P}{2\pi a} + \frac{R_P}{2\pi b} = \frac{R_P}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \approx 0.272\,\Omega/\mathrm{m}$$

$$Z_K = \frac{Z_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \approx \frac{60\,\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \approx 50.7\,\Omega$$

$$\alpha = \frac{R/l}{2 Z_K} \approx 2.68 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Np/m}$$

$$a_{dB}/l = \frac{20}{\ln 10} \cdot \alpha \approx 0.0233\,\mathrm{dB/m} = 23.3\,\mathrm{dB/km}$$



* * * * *