

15. Kovinski valovod

Potujoči ravninski val opisuje pojav v neomejenem prostoru. Stojni val v votlinskem rezonatorju je sestavljen iz dveh ali več potujočih valov v omejenem prostoru, ki ga omejujejo okovinjene ploskve z ničelno $\vec{E}_t=0$ tangencialno komponento električnega polja. Končno lahko iz dveh ali več potujočih ravninskih valov sestavimo tudi kombinacijo stojnega vala v eni ali dveh dimenzijah ter potujočega vala v preostali dimenziji prostora.

Preprost zgled kombinacije dveh potujočih ravninskih valov, ki ju opisujeta valovna vektorja \vec{k}_1 in \vec{k}_2 , tvori stojni val v smeri osi y in napredujoči val v smeri osi z :

Kombinacija stojni/potujoči val

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x C \cos(k_y y) e^{-j\beta z} \quad k_y^2 + \beta^2 = k^2$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x \frac{C}{2} (e^{jk_y y} + e^{-jk_y y}) e^{-j\beta z}$$

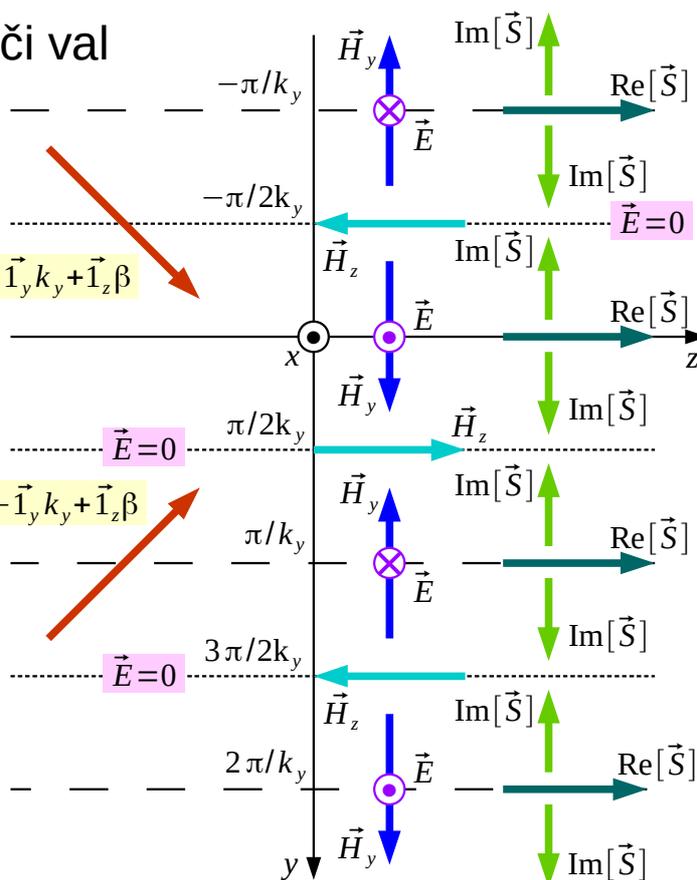
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x \frac{C}{2} [e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}]$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega \mu} \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{j}{kZ} \text{rot } \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{1}_y \frac{C\beta}{kZ} \cos(k_y y) e^{-j\beta z} + \vec{1}_z \frac{jCk_y}{kZ} \sin(k_y y) e^{-j\beta z}$$

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^*$$

$$\vec{S}(\vec{r}) = \vec{1}_y \frac{j|C|^2 k_y}{2kZ} \cos(k_y y) \sin(k_y y) + \vec{1}_z \frac{|C|^2 \beta}{2kZ} \cos^2(k_y y)$$



Skladno z razlago valov ima pripadajoči Poyntingov vektor \vec{S} povsem delovno komponento $\vec{1}_z S_z = \text{Re}[\vec{S}]$ v smeri potujočega vala in popolnoma jalovo komponento $\vec{1}_y S_y = j \text{Im}[\vec{S}]$ v smeri stojnega vala. V koordinatnih smereh, v katerih je Poyntingov vektor \vec{S} povsem jalov, lahko stojni val

prostorsko omejimo, torej okovinimo ploskve, kjer je tangencialna električna poljska jakost $\vec{E}_t=0$ enaka nič.

V smeri potujočega vala prostora ne omejujemo, pač pa uporabimo predlagano napravo, da vodi valovanje natančno v tej smeri. Zamisel se je pojavila že v drugi polovici 19. stoletja. Matematično nalogo je razrešil Lord Rayleigh in leta 1897 dokazal, da votla kovinska cev poljubnega prereza lahko vodi elektromagnetno valovanje v obliki različnih rodov. Šele z razvojem mikrovalovne tehnike in radarja v prvi polovici 20. stoletja postane kovinski valovod z eno samo votlo cevjo, bolj točno votlovod (nemško: Hohlleiter, angleško: hollow waveguide) praktično uporabna in koristna naprava.

Pri opisani kombinaciji stojni/potujoči val smemo okoviniti natančno določene ploskve, vzporedne z ravnino xz , ki ustrezajo vozlom stojnega vala električnega polja. Hkrati smemo okoviniti poljubno ploskev, vzporedno ravnini yz , saj je električno polje nanjo pravokotno. Z okovinjanjem dobimo kovinsko cev pravokotnega prereza $a \times b$, ki deluje kot pravokotni kovinski valovod, bolj točno votlovod:

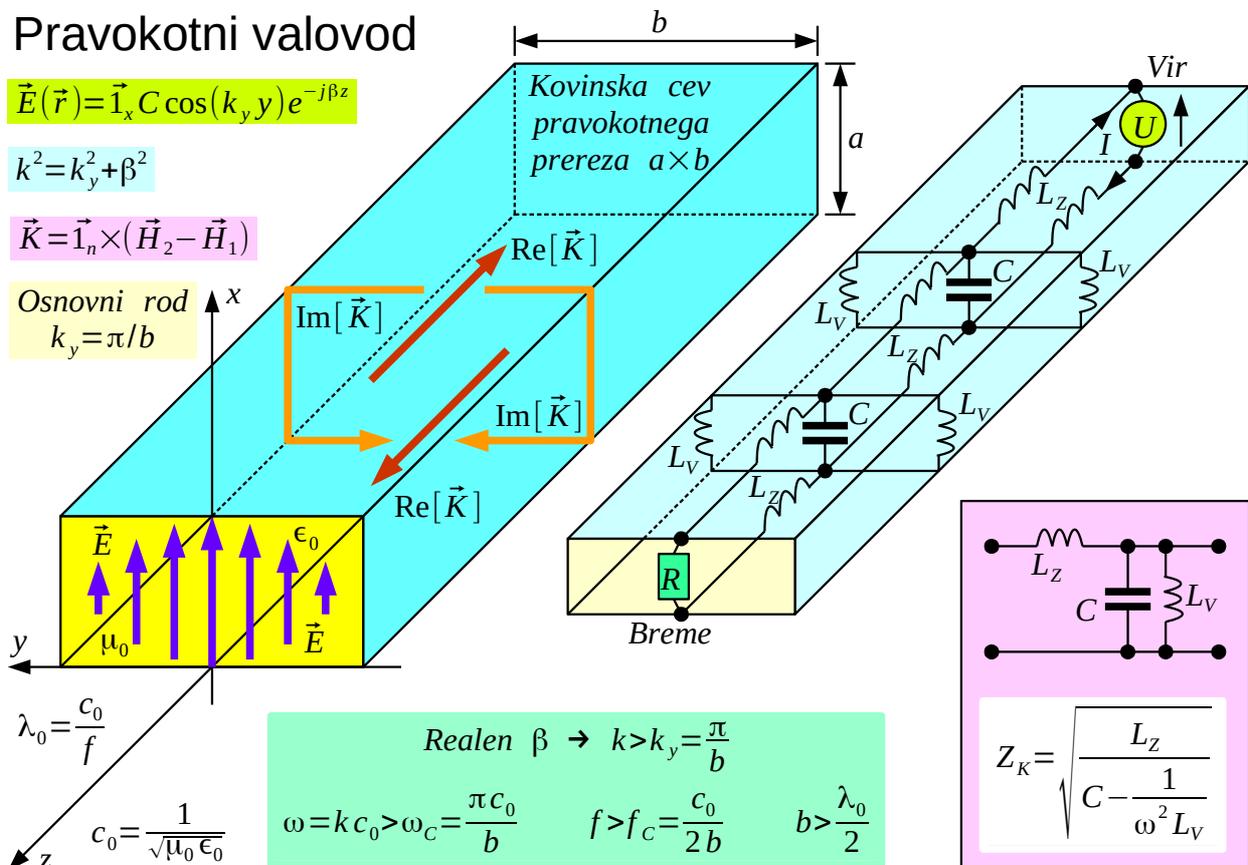
Pravokotni valovod

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x C \cos(k_y y) e^{-j\beta z}$$

$$k^2 = k_y^2 + \beta^2$$

$$\vec{K} = \vec{1}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)$$

Osnovni rod
 $k_y = \pi/b$



Notranjost cevi je lahko popolnoma prazen prostor s permeabilnostjo

μ_0 in dielektričnostjo ϵ_0 . Kovinski valovod lahko sicer izdelamo tudi z notranjostjo iz dielektrika z $\epsilon_r > 1$ oziroma iz feromagnetika z $\mu_r > 1$, vendar ima takšna naprava običajno slabše električne lastnosti oziroma višje izgube od pravega votlovoda. Notranjost pravokotnega valovoda zato kvečjemu zapolnimo z osušenim zrakom pod nadtlakom, da preprečimo vdor vlage. Prenos velikih moči zahteva izolacijski plin v notranjosti cevi, na primer žeplov heksafluorid SF_6 , ki ima višjo električno prebojno trdnost od zraka.

Prestopni pogoji za magnetno polje \vec{H} zahtevajo ploskovne tokove \vec{K} v vseh okovinjenih ploskvah, ko zunaj cevi ni elektromagnetnega polja. Ploskovni tokovi so povsem jalovi $\text{Im}[\vec{K}]$ v smeri stojnega vala in povsem delovni $\text{Re}[\vec{K}]$ v smeri potujočega vala. Ploskovni tok nam tudi pove, kam priključiti izmenični vir, kam breme in kakšno je pričakovano električno obnašanje opisane naprave?

Gornja in spodnja, torej široki stranici b opisanega valovoda se obnašata kot trakasti dvovod s porazdeljeno zaporedno induktivnostjo L_z in porazdeljeno medsebojno kapacitivnostjo C . Bočni oziroma ozki stranici a se obnašata kot dodatna porazdeljena vzporedna kapacitivnost L_v . Pravokotni votlovod lahko torej opišemo z nadomestnim vezjem, še bolj natančno z zaporedno vezavo velikega števila takšnih vezij za diferencialno kratke odseke votlovoda.

Iz nadomestnega električnega vezja ugotovimo, da je karakteristična impedanca Z_K povsem reaktivna (jalova) pri nizkih frekvencah, postane pri določeni frekvenci $\omega_C = 1/\sqrt{L_v C}$ neskončno velika in od tam naprej je pri visokih frekvencah povsem delovna (realna). Pravokotni kovinski valovod se torej obnaša kot visokoprepustno frekvenčno sito.

Do enakovredne ugotovitve pridemo iz zapisa elektromagnetnega polja v pravokotnem kovinskem valovodu. Če naj naprava vodi valovanje, mora biti fazna konstanta $\beta = \sqrt{k^2 - k_y^2}$ povsem realna. Torej mora veljati $k > k_y$ oziroma $\omega > \omega_C$ oziroma $f > f_C$, kjer indeks C pomeni frekvenčno mejo, angleško: cutoff. Frekvenčno mejo si najlažje zapomnimo iz pogoja za širšo stranico valovoda $b > \lambda_0/2$, ki mora biti širša od polovice valovne dolžine v neomejenem prostoru z enakimi snovnimi lastnostmi, kot jih ima notranjost (običajno votle) cevi.

Električno nadomestno vezje se izogiblje izmeram resnične naprave. Hitrost valovanja lahko torej določimo samo iz celovitega zapisa

elektromagnetnega polja. Električno polje zapišemo v časovnem prostoru $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Hitrost valovanja, ki vsebuje eno samo frekvenco ω , dobimo iz pogoja za fazo. Če jezdimo na valu v isti točki, se faza ne sme spreminjati. Rezultat je na prvi pogled presenetljiv, fazna hitrost (angleško: phase velocity) $v_f > c_0$ je vedno večja od svetlobne hitrosti za katerikoli rod m nad svojo pripadajočo frekvenčno mejo $f > f_{0m}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x C \cos(k_y y) e^{-j\beta z}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x \frac{C}{2} [e^{-jk_1 \vec{r}} + e^{-jk_2 \vec{r}}]$$

Rodovi TE_{0m}
 $k_y = m \cdot \frac{\pi}{b} \quad m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_y^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{1}_x \cos(k_y y) \operatorname{Re}[C e^{j(\omega t - \beta z)}]$$

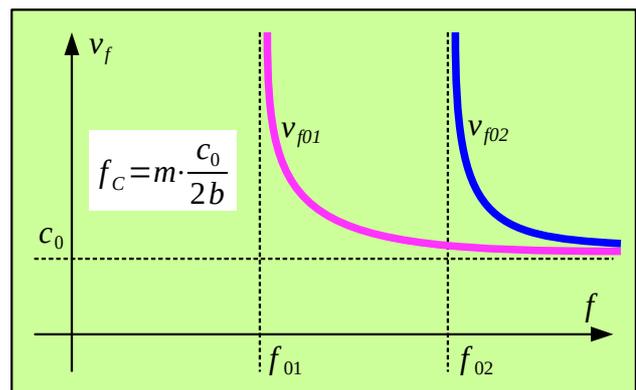
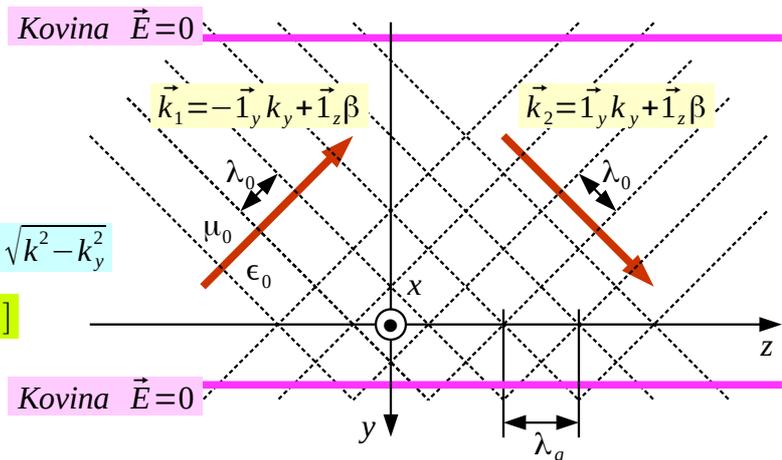
Jezdimo na valu:
 Faza $\omega t - \beta z = \text{konst.}$

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \beta z) = 0 = \omega - \beta \frac{dz}{dt} = \omega - \beta v_f$$

Fazna hitrost $v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{k_y^2}{k^2}}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}} > c_0$

Valovodna valovna dolžina $\lambda_g = \frac{v_f}{f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}} > \lambda_0$

Fazna hitrost



Razlaga postane nazornejša, če ne okovinjimo dveh sosednjih vozlov električnega polja, pač pa izberemo okovinjene ploskvi tako, da je med njima m hrbtov stojnega vala električne poljske jakosti. Na gornji sliki ravninskih valov \vec{k}_1 in \vec{k}_2 ima stojni val $m=9$ hrbtov, kar ustreza rodu valovanja TE₀₉ med okovinjenima ravninama. Valovne fronte vsakega ravninskega vala so pravokotne na pripadajoči valovni vektor in so med sabo razmaknjene za valovno dolžino λ_0 v praznem prostoru.

Navidezna valovna dolžina v valovodu $\lambda_g = 2\pi/\beta$ (angleško: lambda guided) je razdalja med projekcijama dveh sosednjih valovnih front na os z in je zato nujno večja $\lambda_g > \lambda_0$ od valovne dolžine v praznem prostoru. Projekcija $\lambda_g = v_f/f$ je lahko zelo velika in postane celo neskončna

$\lambda_g \rightarrow \infty$ tik ob mejni frekvenci $f \approx f_{0m}$ pripadajočega rodu valovanja. Z višanjem frekvence se fazna hitrost kateregakoli rodu valovanja znižuje in približuje $v_f \rightarrow c_0$ hitrosti svetlobe v praznem prostoru.

Opisani pojavi niso v nasprotju z relativistiko. Relativistika sicer zahteva, da energija niti informacija ne moreta potovati s hitrostjo, večjo od svetlobe. Fazno hitrost v_f smo izračunali za eno samo frekvenco ω z neskončno ozkim spektrom, takšen signal zato ne prenaša nobene informacije. Valovna dolžina λ_g v valovodu je samo projekcija, ki je lahko poljubno velika.

Hitrost potovanja energije oziroma informacije imenujemo skupinska hitrost v_g (angleško: group velocity). Določimo jo iz hitrosti potovanja ovojnice signala, ki vsebuje najmanj dve različni frekvenci ω_1 in ω_2 :

Dvotonsko krmiljenje $\omega_A, \omega_B \gg \omega_A - \omega_B = \Delta\omega$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{1}_x \cos(k_y y) \text{Re} \left[A e^{j(\omega_A t - \beta_A z)} + B e^{j(\omega_B t - \beta_B z)} \right]$$

$$\varphi_A = \omega_A t - \beta_A z \quad \langle \varphi \rangle = (\varphi_A + \varphi_B) / 2 \quad \dots \text{hiter!}$$

$$\varphi_B = \omega_B t - \beta_B z \quad \Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B \quad \dots \text{počasen!}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{1}_x \cos(k_y y) \text{Re} \left[e^{j\langle \varphi \rangle} \left(A e^{j\Delta\varphi/2} + B e^{-j\Delta\varphi/2} \right) \right]$$

Ovojnica

Jezdimo na ovojnici:

$$\Delta\varphi = \Delta\omega t - \Delta\beta z = \text{konst.}$$

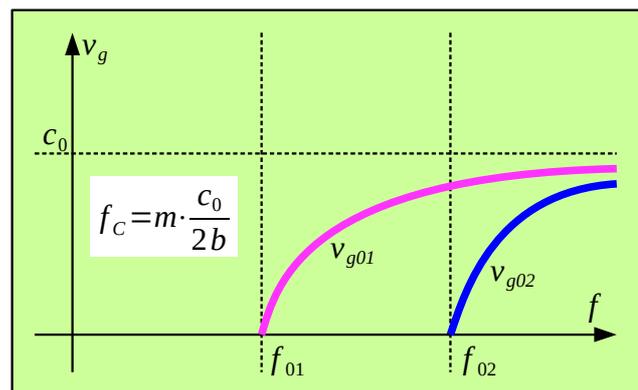
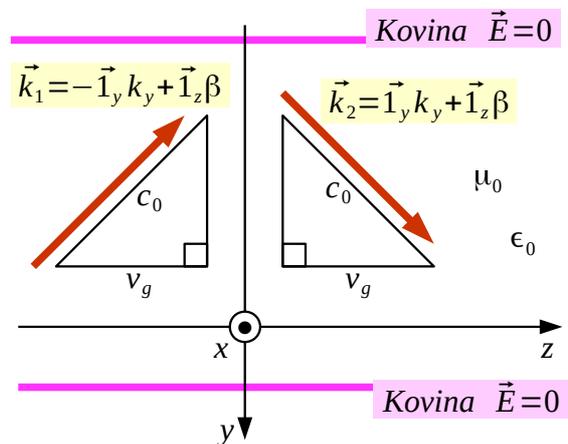
$$\frac{d}{dt} (\Delta\omega t - \Delta\beta z) = 0 = \Delta\omega - \Delta\beta \frac{dz}{dt}$$

$$\text{Skupinska hitrost } v_g = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta}$$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \sqrt{k^2 - k_y^2} = \frac{2\omega/c_0^2}{2\sqrt{k^2 - k_y^2}} = \frac{1}{c_0 \sqrt{1 - \frac{k_y^2}{k^2}}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c_0 \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}} < c_0$$

Skupinska hitrost



Električno polje $\vec{E}(\vec{r}, t)$ dvotonskega krmiljenja zapišemo v časovnem prostoru. Zapis razstavimo na hitri člen in počasne člene. Počasni členi nihajo s polovico razlike frekvenc $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, ki je lahko poljubno majhna, torej poljubno počasen pojav. Skupinsko hitrost v_g določimo tako, da jezdimo na ovojnici, ki jo določajo počasni členi. Skupinska hitrost

$v_g < c_0$ je vedno manjša od svetlobne hitrosti ravninskih valov v notranjosti votlovida, kar je povsem v skladu z relativistiko.

Za skupinsko hitrost v_g obstaja še preprostejša razlaga. Ravninski val \vec{k}_1 zadene ob kovinsko steno in se pri odboju pretvori v ravninski val \vec{k}_2 . Slednji zadene ob drugo kovinsko steno in se tam pretvori nazaj v izvorni val \vec{k}_1 . V pravokotnem valovodu torej elektromagnetno valovanje cikcaka med kovinskima stenama. Projekcija svetlobne hitrosti c_0 na os z valov \vec{k}_1 ali \vec{k}_2 je natančno skupinska hitrost v_g .

Tik ob mejni frekvenci $f \approx f_{0m}$ opazovanega rodu je cikcak zelo gost in gre $v_g \rightarrow 0$ proti nič. Večina elektromagnetnega polja v votlovodu daje energijo stojnega vala, moč napredujočega vala pa je razmeroma majhna. Z višanjem frekvence se cikcak redči. Energija stojnega vala se z višanjem frekvence niža, kar opisuje člen k_y/k jalove komponente gostote pretoka moči $\text{Im}[\vec{S}]$. Moč napredujočega vala se z višanjem frekvence veča, kar opisuje člen β/k delovne komponente gostote pretoka moči $\text{Re}[\vec{S}]$.

Pravokotni kovinski valovod želimo uporabiti v praktičnih napravah, elektronskih vezjih in antenah. Tako sodobna polprevodniška elektronska vezja kot antene delajo z razmeroma nizkimi impedancami v velikostnem razredu $Z_K \approx 50 \Omega$ oziroma impedance običajnega koaksialnega kabla. Pravokotni kovinski valovod deluje z višjimi impedancami in potrebuje primeren transformator.

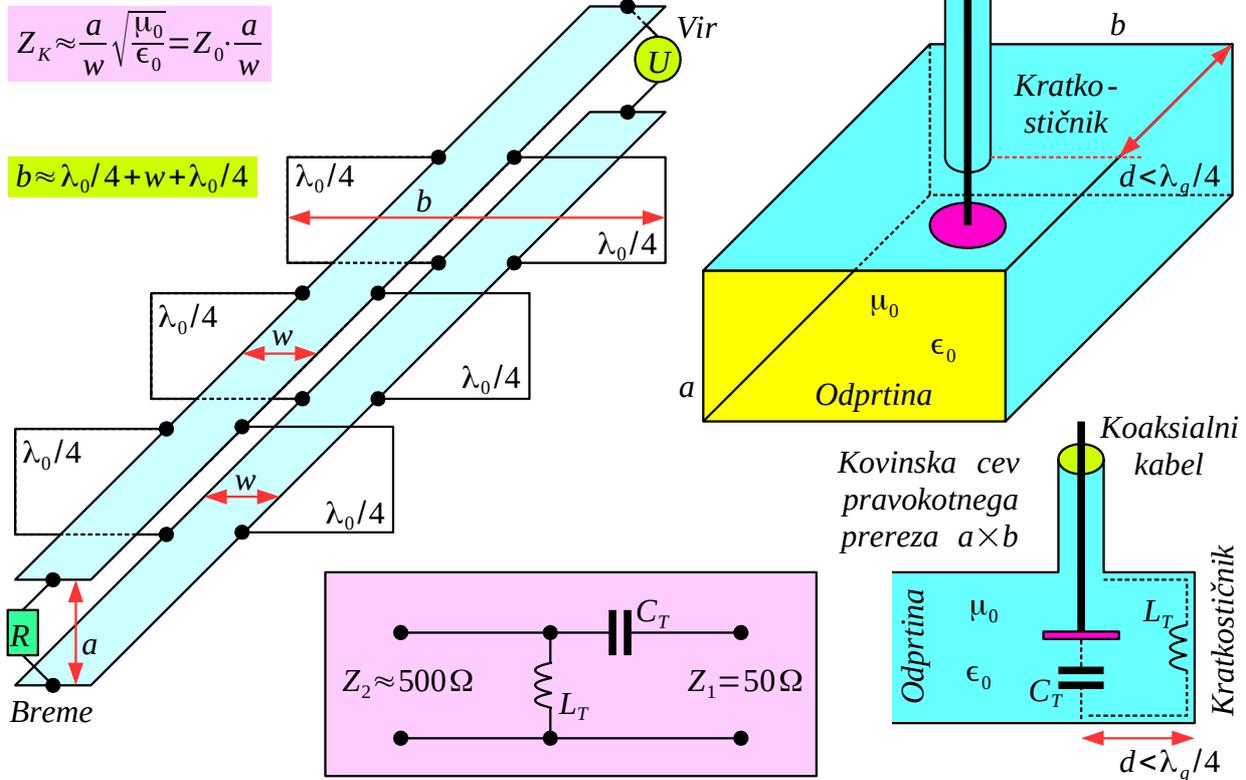
Strogo gledano v kovinskem votlovodu električna napetost U sploh ne obstaja, saj je vrtinčenje električne poljske jakosti $\text{rot} \vec{E} \neq 0$ različno od nič! Ploskovni tok \vec{K} v kovinskih stenah lahko sicer seštejemo v tok I , če je to sploh smiselno? Karakteristične impedance pravokotnega votlovida žal ne moremo definirati kot $Z_K = U/I$.

Kot merilo za impedanco votlovida se pogosto navaja razmerje prečnih komponent polja $Z = E_{\text{prečni}}/H_{\text{prečni}}$. Slednje je sicer pravilno definirano, a je v električnih vezjih neuporabno. V takšni definiciji impedanca osnovnega rodu TE₀₁ sploh ni odvisna od ožje stranice a pravokotne kovinske cevi.

Bolj uporabna je sicer zelo groba razlaga delovanja pravokotnega kovinskega valovoda kot osrednjega trakastega dvovoda, ki ima ob straneh še kovinske opornice. Slednje izberemo dolžine $\lambda_0/4$, da kratek stik ožje

stranice valovoda preslikajo v odprte sponke ob osrednjem trakastem dvovodu:

Transformator valovod/koaks



Karakteristično impedanco Z_K določata širina w in razdalja a med vodnikoma osrednjega trakastega dvovoda. Navidezne odprte sponke bočnih opornic naj ne bi imele učinka na karakteristično impedanco Z_K . V takšnem grobem približku je karakteristična impedanca opisanega voda $Z_K = U/I \approx Z_0 \cdot a/w$. Pri tem je $Z_0 \approx 377 \Omega$ valovna impedanca (praznega) prostora znotraj votle cevi.

Širina obeh trakov w narašča s frekvenco od začetne vrednosti nič pri mejni frekvenci $f \approx f_{0m}$. Karakteristična impedanca je pri mejni frekvenci neskončno velika in nato z naraščanjem frekvence upada. Grobi približek pravi, da bo karakteristična impedanca opisanega votlovoda v velikostnem razredu $Z_2 \approx 500 \Omega$ oziroma za en velikostni razred (desetkrat) večja od karakteristične impedance koaksialnega kabla $Z_1 = 50 \Omega$.

Transformacijo impedance opravi vezje z zaporednim kondenzatorjem C_T in vzporedno tuljavo L_T . Kondenzator C_T je običajno izdelan kot

elektroda, ki je pritrjena na žilo koaksialnega kabla. Druga plošča kondenzatorja je kar spodnja široka stranica pravokotne cevi. Oklop koaksialnega kabla je spojen na gornjo široko stranico cevi.

Pravokotna kovinska cev je na enem koncu kratkosklenjena. Če je razdalja med kondenzatorjem C_T in kratkostičnikom $d < \lambda_g/4$ manjša od četrte valovodne valovne dolžine, se kratek stik preslika v induktivnost L_T na priključku kondenzatorja C_T . Natančno vrednost induktivnosti L_T seveda izbiramo s položajem kovinske stene (kratkostičnika) oziroma nastavljanjem razdalje d .

Drugi konec kovinske cevi se nadaljuje v pravokotni valovod poljubne dolžine. Slednji se lahko zaključi s ponovnim transformatorjem nazaj na koaksialni kabel oziroma z odprtino. Odprtina na koncu valovoda sploh ne predstavlja odprtih sponk. Prečne izmere votlovoda so primerljive z valovno dolžino, zato se takšna odprtina obnaša kot učinkovita antena, imenovana tudi valovodni lijak.

Opisani transformator iz koaksialnega kabla na pravokotni kovinski valovod je seveda uporaben le pri tistih frekvencah, ko v pravokotni cevi lahko potuje le osnovni rod TE_{01} z najnižjo mejno frekvenco $f_C = f_{01}$. Z višanjem frekvence se v kovinski cevi pravokotnega prereza lahko širi čedalje več rodov. Rodove označimo z dvema indeksoma n in m , ki pomenita število hrbtov stojnega vala v prečnih smereh x in y . V pravokotnem valovodu sta kartezični koordinati x in y oziroma indeksa n in m med sabo enakovredna ter ju lahko med sabo zamenjamo.

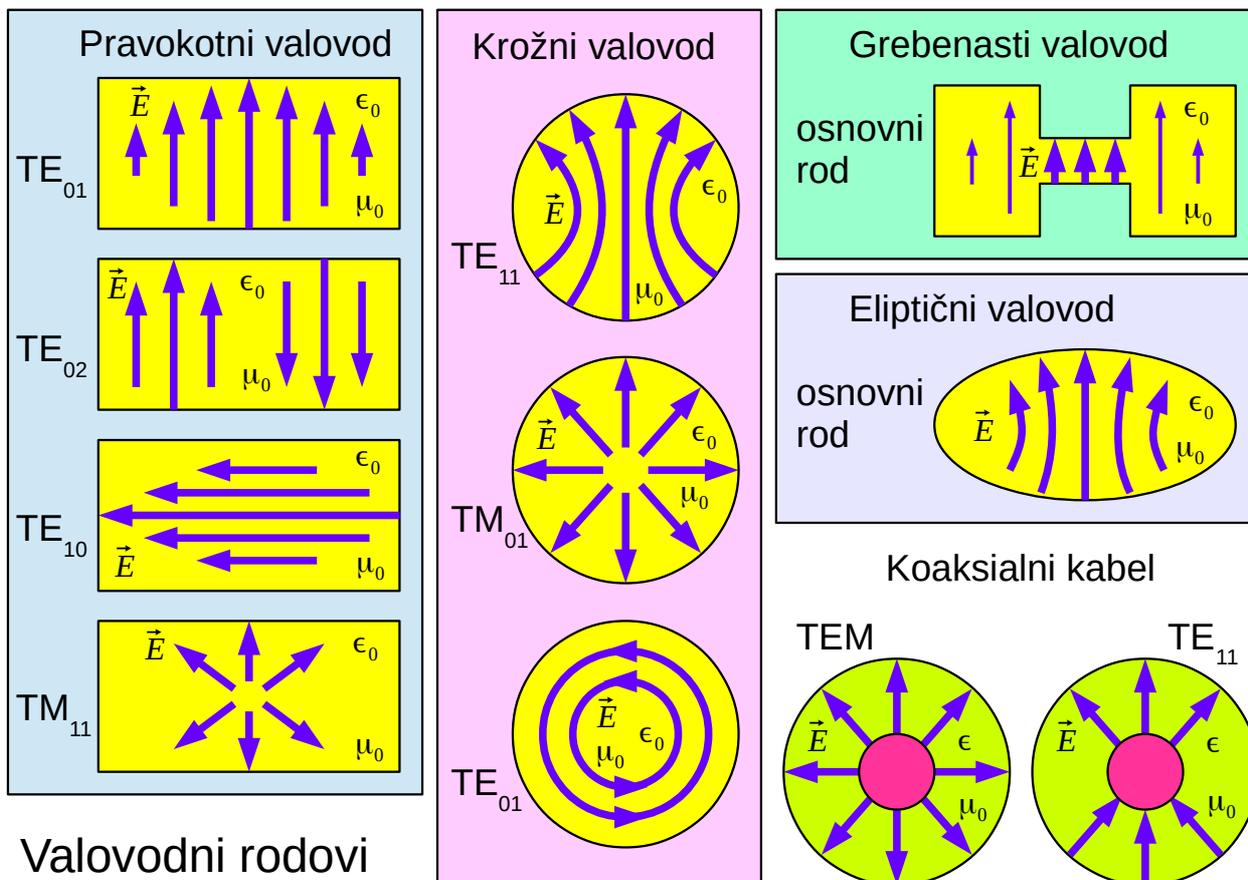
Rodovi v pravokotni kovinski cevi imajo tudi vzdolžno komponento polja v smeri osi z . Rodove, ki imajo od nič različno $H_z \neq 0$ vzdolžno magnetno polje, imenujemo transversalno električni rodovi TE_{nm} (ameriška oznaka) oziroma rodovi H_{nm} (nemška oznaka). Rodove, ki imajo od nič različno $E_z \neq 0$ vzdolžno električno polje, imenujemo transversalno magnetni rodovi TM_{nm} (ameriška oznaka) oziroma rodovi E_{nm} (nemška oznaka).

Posamezni rodovi so popolnoma neodvisni med sabo. Vsak rod ima svojo neodvisno energijo stojnega vala W_{nm} , prenaša svojo neodvisno delovno moč P_{nm} , svojo neodvisno informacijo in ima svojo neodvisno fazno konstanto β_{nm} . Dva sicer različna rodova lahko imata popolnoma enaki fazni konstanti. Takšnima dvema rodovoma pravimo, da sta izrojena (angleško: degenerate), ker ju zaradi enakih faznih konstant zelo težko

ločimo med sabo.

Pri praktični uporabi valovoda običajno želimo, da valovod prenaša en sam rod valovanja. Če valovod lahko prenaša več različnih rodov, pride zaradi mehanskih odstopanj (toleranc) kovinske cevi do sklopa med različnimi rodovi. Sklop med različnimi rodovi pomeni potovanje signala po različno dolgih poteh in pripadajoče popačenje. V bližini mejnih frekvenc f_{nm} posameznih rodov se lahko izredno poveča slabljenje. Višji valovodni rodovi povzročijo tudi odklon glavnega snopa in popačenje smernega diagrama antene.

V opisu polja osnovnega rodu TE_{01} pravokotnega kovinskega valovoda krajša stranica a pravokotne cevi sploh ne nastopa. Majhen a sicer pomeni večje izgube zaradi ohmske upornosti kovinskih sten, večji a pa pojav rodov s stojnim valom v smeri x . Razmerje stranic pravokotne cevi običajno izberemo $b=2a$, da mejna frekvenca rodu TE_{10} s stojnim valom v smeri x sovpada $f_{10}=f_{02}$ z mejno frekvenco naslednjega višjega rodu TE_{02} s stojnim valom v smeri y :



Valovodni rodovi

Opisana izbira razmerja stranic $b=2a$ omogoča frekvenčni pas

enorodovnega delovanja pravokotnega kovinskega votlovoda v razponu $f_{max}:f_{min}=2:1$. Uporaben frekvenčni pas pravokotnega valovoda je ožji, približno $f_{max}:f_{min}\approx 1.5:1$. V praksi se izogibljemo predvsem spodnji frekvenčni meji osnovnega rodu ($\sim 30\%$), kjer sta slabljenje zaradi velike jalove energije gostega cikcaka in popačenje zaradi spreminjanja $\beta(\omega)$ zelo visoka. Gornji frekvenčni meji se lahko približamo na $\sim 5\%$, da ne vzbudimo višjih rodov zaradi mehanskih toleranc cevi oziroma krivin.

Na primer, sprejemnik za satelitsko TV v frekvenčnem pasu 12 GHz uporablja standardizirani valovod WR75 (ali WG17 ali R120) kot vhodni priključek. Valovod WR75 je namenjen delovanju v frekvenčnem pasu 10 GHz... 15 GHz. Notranje izmere $a=0.375''(cole)\approx 9.5\text{ mm}$ in $b=0.75''(cole)\approx 19\text{ mm}$ določajo frekvenčno mejo osnovnega rodu $f_{01}=7.87\text{ GHz}$ in frekvenčno mejo višjih rodov $f_{02}=f_{10}=15.74\text{ GHz}$.

Širši frekvenčni pas omogoča drugačen presek kovinske cevi. Grebenasti valovod (angleško: ridge waveguide) je v osrednjem delu skrčen z ene ali z obeh strani (angleško: double-ridge waveguide), da je karakteristična impedanca Z_K trakastega dovoda nižja. Višja kapacitivnost trakastega dvovoda znižuje frekvenčno mejo f_{01} osnovnega rodu in hkrati nima večjega učinka na mejne frekvence f_{nm} višjih rodov.

Uporaben frekvenčni pas grebenastega valovoda na ta način dosega $f_{max}:f_{min}=3:1$ in več. Omejitev predstavlja povečano slabljenje zaradi nižje karakteristične impedance Z_K osrednjega trakastega dvovoda. Nižja karakteristična impedanca Z_K grebenastega valovoda sicer omogoča preprostejšo transformacijo na koaksialni kabel z $Z_K=50\ \Omega$.

Kot votli kovinski valovod lahko sicer uporabimo kovinsko cev poljubnega prereza, kar je izpeljal že Lord Rayleigh leta 1897. Elektromagnetni obravnavi najrazličnejših valovodov najrazličnejših prerezov je skupna preprosta vzdolžna koordinata z . Slednja ima mersko enoto meter $[m]$, preprost Laméjev koeficient $h_z=1$ in konstanten smernik $\vec{1}_z = \overrightarrow{konst.}$.

Za rešitev elektromagnetne naloge v dolgi kovinski cevi poljubnega, ampak nespremenljivega prereza zadošča, da rešimo valovni enačbi za električno in magnetno polje v votli notranjosti cevi samo za preprosti skalarni valovni enačbi vzdolžnih komponent:

$$\Delta E_z + k^2 E_z = 0 \quad \text{in} \quad \Delta H_z + k^2 H_z = 0$$

Manjkajoče prečne komponente električnega in magnetnega polja nato izračunamo iz vzdolžnih komponent s pomočjo Maxwellovih enačbo, bolj točno s pomočjo Ampèrejevega in Faradayevega zakona v diferencialni obliki. Račun nam dodatno poenostavi iskanje rešitve v obliki napredujočega vala v vzdolžni smeri z , kar pomeni odvisnost $e^{-j\beta z}$ in preprosto odvajanje po vzdolžni koordinati $\partial/\partial z = -j\beta$.

Na primer, votlo kovinsko cev krožnega prereza s polmerom a uporabimo kot valovod. Pripadajočo elektromagnetno nalogo rešujemo v valjnih koordinatah (ρ, φ, z) . Potujoči val v vzdolžni smeri z opisujeta rešitvi valovnih enačb vzdolžnih komponent:

$$E_z(\rho, \varphi, z) = J_m(\rho \sqrt{k^2 - \beta^2}) [A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi] e^{-j\beta z}$$

$$H_z(\rho, \varphi, z) = J_m(\rho \sqrt{k^2 - \beta^2}) [C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi] e^{-j\beta z}$$

Ker v osi votle cevi ne pričakujemo singularnosti, v obeh rešitvah zadošča ena sama Besselova funkcija $J_m(\rho \sqrt{k^2 - \beta^2})$. Indeks

$m=0,1,2,3,4,5\dots$ mora biti celo število. A_m, B_m, C_m in D_m so štiri poljubne konstante, ki določajo amplitude pripadajočih rodov za vsak indeks m .

Manjkajoče štiri prečne komponente $E_\rho, E_\varphi, H_\rho$ in H_φ nato izračunamo iz vzdolžnih komponent E_z in H_z s pomočjo Ampèrejevega in Faradayevega zakona:

Valjne koordinate (ρ, φ, z)

Napredujoči val v smeri z : $\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \text{rot } \vec{H}$$

Brez izvorov $\vec{J}=0$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{1}_\rho & \rho \vec{1}_\varphi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & -j\beta \\ H_\rho & \rho H_\varphi & H_z \end{vmatrix} \begin{cases} \rightarrow E_\rho = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + j\beta H_\varphi \right] \rightarrow E_\rho - \frac{\beta}{\omega\epsilon} H_\varphi = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \\ \rightarrow E_\varphi = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[-\frac{\partial H_z}{\partial \rho} - j\beta H_\rho \right] \rightarrow E_\varphi + \frac{\beta}{\omega\epsilon} H_\rho = \frac{j}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \end{cases}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \text{rot } \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{1}_\rho & \rho \vec{1}_\varphi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & -j\beta \\ E_\rho & \rho E_\varphi & E_z \end{vmatrix} \begin{cases} \rightarrow H_\rho = \frac{j}{\omega\mu} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + j\beta E_\varphi \right] \rightarrow H_\rho + \frac{\beta}{\omega\mu} E_\varphi = \frac{j}{\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \\ \rightarrow H_\varphi = \frac{j}{\omega\mu} \left[-\frac{\partial E_z}{\partial \rho} - j\beta E_\rho \right] \rightarrow H_\varphi - \frac{\beta}{\omega\mu} E_\rho = \frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \end{cases}$$

$$\omega^2 \mu \epsilon = k^2$$

$$E_\rho = \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right]$$

$$H_\rho = \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left[-\frac{\omega\epsilon}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right]$$

$$E_\varphi = \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right]$$

$$H_\varphi = \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left[\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right]$$

Prečne komponente polja iz vzdolžnih

Iz vzdolžne komponente magnetnega polja H_z dobimo transverzalno električne rodove TE_{mn} (H_{mn}). Iz vzdolžne komponente električnega polja E_z dobimo transverzalno magnetne rodove TM_{mn} (E_{mn}). V valjnih koordinatah (ρ, φ, z) je seveda pomen indeksov drugačen kot v kartezičnih koordinatah (x, y, z) pravokotnega votlovida! Prvi indeks m šteje hrbte stojnega vala v smeri koordinate φ , drugi indeks n pa šteje hrbte stojnega vala v smeri koordinate ρ .

Rodove TE_{mn} in TM_{mn} poiščemo iz prestopnih pogojev. Tangencialna komponenta električne poljske jakosti $\vec{E}_t(a, \varphi, z) = 0$ mora biti nič povsod na notranji steni cevi s polmerom $\rho = a$. Rodove TE_{mn} poiščemo iz pogoja, kjer ničlam odvodov ustrezajo maksimumi in minimumi Besselovih funkcij:

$$E_\varphi(\rho = a) = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = 0 \rightarrow J_m'(a\sqrt{k^2 - \beta^2}) = 0$$

Rodove TM_{mn} poiščemo iz pogoja za ničle Besselovih funkcij:

$$E_z(\rho = a) = 0 \rightarrow J_m(a\sqrt{k^2 - \beta^2}) = 0$$

Najpomembnejši podatek so mejne frekvence ω_{mn} oziroma f_{mn} posameznih rodov, iz katerih lahko izračunamo fazne konstante β_{mn} oziroma valovodne valovne dolžine λ_{gmn} pri poljubni frekvenci.

$$\text{Rodovi TE}_{mn}: J'(k_{mn}a)=0 \quad \text{ali} \quad J'\left(\frac{\omega_{mn}}{c_0}a\right)=0 \quad \text{ali} \quad J'\left(\frac{2\pi f_{mn}}{c_0}a\right)=0$$

$$\text{Rodovi TM}_{mn}: J(k_{mn}a)=0 \quad \text{ali} \quad J\left(\frac{\omega_{mn}}{c_0}a\right)=0 \quad \text{ali} \quad J\left(\frac{2\pi f_{mn}}{c_0}a\right)=0$$

Prva značilna točka Besselovih funkcij je maksimum $J_1'(1.8412)=0$ (glej risbo Besselovih funkcij v poglavju 14. Votlinski rezonator). Osnovni rod v valovodu krožnega prereza je torej TE_{11} z mejno frekvenco:

$$f_{\text{TE}11} = \frac{1.8412 c_0}{2\pi a}$$

Rod TE_{11} v valovodu krožnega prereza je dvakrat izrojen, saj neodvisni konstanti C_1 in D_1 dajeta dva neodvisna rodova z enako fazno konstanto $\beta_{\text{TE}11}$ a različno smerjo električnega polja \vec{E} oziroma različno polarizacijo. Naslednja značilna točka je ničla $J_0(2.4049)=0$, ki ustreza rodu TM_{01} v valovodu krožnega prereza z mejno frekvenco:

$$f_{\text{TM}01} = \frac{2.4049 c_0}{2\pi a}$$

Rod TM_{01} v valovodu krožnega prereza ni izrojen, saj je smiselna edino konstanta A_0 . Obstaja ena sama različica rodu TM_{01} s fazno konstanto $\beta_{\text{TM}01}$ in rotacijsko simetrično sliko elektromagnetnega polja.

Posebnost predstavlja rotacijsko simetrični rod TE_{01} v valovodu krožnega prereza z mejno frekvenco:

$$f_{\text{TE}01} = \frac{3.8318 c_0}{2\pi a}$$

Za razliko od večine ostalih rodov ima TE_{01} samo jalove tokove $\text{Im}[\vec{K}]$ v steni kovinske cevi. Ker jakost jalovih tokov upada s frekvenco,

slabljenje rodu TE_{01} zaradi končno velike prevodnosti stene prav tako upada s frekvenco. Pri zelo visokih frekvencah ima TE_{01} od vseh rodov najnižje slabljenje in z višanjem frekvence gre slabljenje celo proti nič!

Žal ima TE_{01} razmeroma visoko mejno frekvenco, ga je težko vzbuditi in je težko preprečiti sklop z rodovi nižjih redov zaradi majhnih mehanskih odstopanj oblike cevi. Nižjo ali enako mejno frekvenco ima kar sedem različnih rodov: TE_{11} (dvakrat izrojen), TM_{01} , TE_{21} (dvakrat izrojen) in TM_{11} (dvakrat izrojen).

Votlovod krožnega prereza najpogosteje uporabljamo na osnovnem rodu TE_{11} . Obe izrojeni inačici slednjega ustrezata rodovoma TE_{01} in TE_{10} v votlovodu kvadratnega prereza. Izrojenost v votlovodu kvadratnega prereza preprečimo z izbiro različnih stranic $a \neq b$ pravokotnega votlovoda. Izrojenost v votlovodu krožnega prereza preprečimo tako, da krožno cev sploščimo v eliptično cev.

Eliptični valovod omogoča podoben frekvenčni pas enorodovnega delovanja $f_{max} : f_{min}$ kot pravokotni valovod. Eliptični valovod je sicer ugodnejši za vgradnjo, lahko ga polagamo kot debelejši koaksialni kabel. Reševanje valovne enačbe v valjnih eliptičnih koordinatah (u, v, z) je zahtevna matematična naloga.

Večje število valovodnih rodov dobimo tudi takrat, ko si tega ne pričakujemo niti želimo. Na primer, koaksialni kabel običajno uporabljamo na osnovnem rodu TEM, ki lahko vodi tudi enosmerno $f=0$. Pri dovolj visoki frekvenci tudi v koaksialnem kablu nastopijo višji rodovi. Najnižjo mejno frekvenco ima rod TE_{11} , podoben enakorednemu rodu v krožnem votlovodu.

Koaksialni kabel ni votel. Poleg oklopa, cevi krožnega prereza, vsebuje vsaj še žilo v sredini. Prostor med žilo in oklopom je izpolnjen z dielektrikom $\epsilon_r > 1$. Oboje, žila in dielektrik, znižujeta mejno frekvenco prvega višjega rodu TE_{11} . Že majhna ekscentričnost žile povzroči sklop med rodovoma TEM in TE_{11} , kar pomeni zelo visoko slabljenje v bližini mejne frekvence rodu TE_{11} ter pripadajoče popačenje signala.

Uporaben približek za mejno frekvenco rodu TE_{11} v koaksialnem kablu z žilo polmera a , oklopom notranjega polmera b in dielektrikom ϵ_r med žilo in oklopom, je naslednji:

$$f_{TE11} \approx \frac{c_0 / \sqrt{\epsilon_r}}{\pi(a+b)}$$

Približek povsem točno velja v primeru, ko polmer žile $a \rightarrow b$ skoraj doseže polmer oklopa. Ko postaja žila zelo tanka $a \rightarrow 0$, daje približek nekoliko previsok rezultat v primerjavi s točnim izrazom za rod TE_{11} v cevi krožnega prereza polmera b brez osrednje žile, ampak zapolnjene z dielektrikom ϵ_r :

$$f_{TE11} \approx \frac{1.8412 c_0 / \sqrt{\epsilon_r}}{2 \pi b}$$

Kot zgled si oglejmo koaksialni kabel UT141, na osnovi katerega so načrtovane vtičnice in vtikači družine SMA. Oznaka kabla pomeni premer oklopa $2b = 0.141'' (cole) \approx 3.6 \text{ mm}$. Pri dielektričnosti $\epsilon_r \approx 2$ in karakteristični impedanci $Z_K = 50 \Omega$ znaša premer žile $2a \approx 1.1 \text{ mm}$. Približek daje mejno frekvenco enorodovnega delovanja $f_{TE11} \approx 28.7 \text{ GHz}$. Delovanje vtičnic in vtikačev družine SMA je zato zajamčeno vse do frekvence $f_{max} = 26.5 \text{ GHz}$.

Poleg koaksialnega kabla in votlih kovinskih cevi (votlovodov) uporabljamo še številne druge vrste elektromagnetnih valovodov. Danes so najpomembnejši dielektrični valovodi v obliki svetlobnih vlaken. Delovanje slednjih je podobno kovinskim valovodom. Svetlobna vlakna pri tem izkoriščajo popolni odboj elektromagnetnega valovanja na meji dveh različnih dielektrikov namesto odboja na površini kovine. Valovod brez kovin omogoča za več velikostnih razredov nižje slabljenje.

Zaradi izjemnega pomena v telekomunikacijah je svetlobnim vlaknom dodeljen poseben predmet z imenom "Optične komunikacije". V sklopu predmeta "Elektrodinamika" opišemo le osnovna dogajanja v kakršnemkoli valovodu, razjasnimo osnovne pojme kot so fazna hitrost in skupinska hitrost ter postopek reševanja valovne enačbe v kakršnemkoli valovodu okroglega prereza. Vse omenjeno seveda potrebujemo v zahtevnejši obravnavi svetlobnih vlaken.

* * * * *