

14. Votlinski rezonator

Potujoči ravninski val opisuje pojav v neomejenem prostoru. Smer žarka svetlobe lahko tem natančneje določimo, čim večja je širina žarka $w \gg \lambda$ v primerjavi z valovno dolžino. Iz dveh ali več potujočih valov sestavimo stojni val, ki načeloma prav tako opisuje pojav v neomejenem prostoru.

Ravninske valove, gradnike stojnega vala lahko izberemo tako, da stojni val ne prenaša delovne moči. Tedaj je Poyntingov vektor \vec{S} v eni, dveh ali vseh treh dimenzijah prostora povsem jalov oziroma enak nič. V koordinatnih smereh, v katerih je Poyntingov vektor \vec{S} povsem jalov, lahko stojni val prostorsko omejimo. Na primer okovinimo ploskve, kjer je tangencialna električna poljska jakost $\vec{E}_t=0$ enaka nič.

Napravo, ki zadržuje dinamično $\omega \neq 0$ elektromagnetno polje v omejenem prostoru, imenujemo votlinski rezonator. Votlinski rezonatorji so pomembni gradniki številnih naprav. Preprost eno-dimenzijski votlinski rezonator sta razvila Charles Fabry in Jean-Baptiste Alfred Perot leta 1899 za merjenje lastnosti spektra svetlobe.

Eno-dimenzijski stojni val sestavimo iz dveh enako močnih ravninskih valov $\vec{E}_N(z)$ in $\vec{E}_O(z)$, ki potujeta v nasprotnih smereh v osi z . Pripadajoče magnetno polje $\vec{H}(z)$ je v kvadraturi z električnim poljem $\vec{E}(z)$. Hrbti stojnega vala električnega polja ustrezajo vozlom magnetnega polja in obratno. Vozle električnega polja $\vec{E}(z)=0$ okovinimo, torej tja postavimo dve kovinski zrcali $\Gamma = -1$.

Pri izbrani razdalji d lahko med vzporednima zrcaloma obstaja elektromagnetno polje samo določenih frekvenc. Pripadajoči rod opišemo z oznako TEM_{00m} : električno polje $\vec{E} \perp \vec{1}_z$ in magnetno polje $\vec{H} \perp \vec{1}_z$ sta pravokotna na os z . Trije indeksi pomenijo nič sprememb v osi x , nič sprememb v osi y in m hrbtov električnega polja v osi z . Pri tem je $m=1,2,3,4,5,6\dots$ poljubno naravno število:

Fabry-Perot

Odboj $\vec{k}_O = -\vec{1}_z k$

$$\vec{E}_O(z) = \vec{1}_x \frac{C}{2} e^{jkz}$$

$$\vec{H}_O(z) = -\vec{1}_y \frac{C}{2Z} e^{jkz}$$

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_V(z) + \vec{E}_O(z) = \vec{1}_x \frac{C}{2} e^{-jkz} + \vec{1}_x \frac{C}{2} e^{jkz}$$

$$\vec{E}(z) = \vec{1}_x C \cos(kz)$$

$$\vec{H}(z) = \vec{H}_V(z) + \vec{H}_O(z) = \vec{1}_y \frac{C}{2Z} e^{-jkz} - \vec{1}_y \frac{C}{2Z} e^{jkz}$$

$$\vec{H}(z) = -\vec{1}_y \frac{jC}{Z} \sin(kz)$$

$$\vec{S}(z) = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \vec{1}_z \frac{j|C|^2}{2Z} \cos(kz) \sin(kz)$$

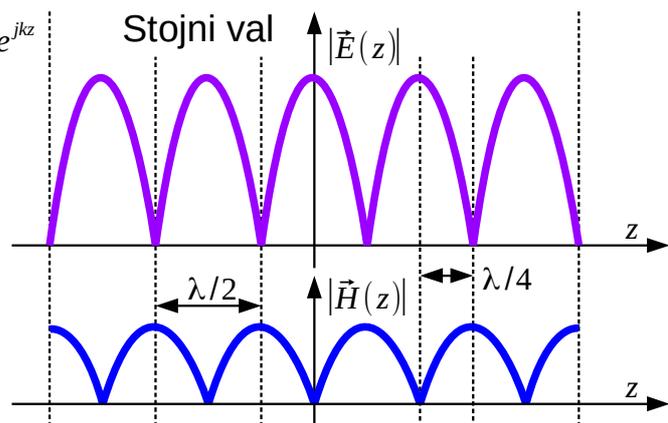
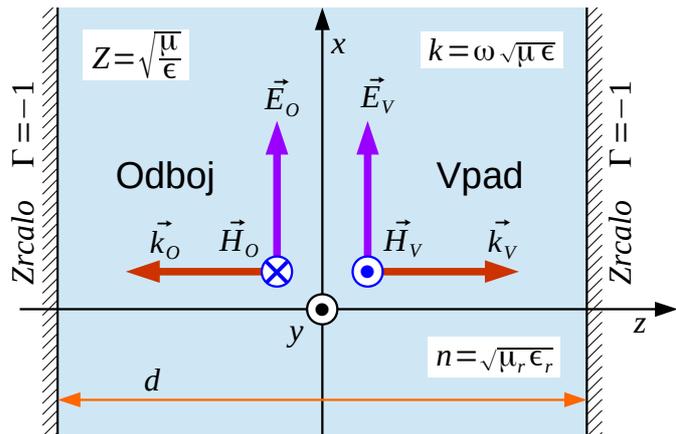
$$kd = m\pi \quad \text{TEM}_{00m} \quad m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

$$f_{00m} = k_{00m} \frac{v}{2\pi} = m \frac{c_0}{2d \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = m \frac{c_0}{2nd}$$

$$\text{Vpad} \quad \vec{k}_V = \vec{1}_z k$$

$$\vec{E}_V(z) = \vec{1}_x \frac{C}{2} e^{-jkz}$$

$$\vec{H}_V(z) = \vec{1}_y \frac{C}{2Z} e^{-jkz}$$



Fabry-Perotov rezonator uporabimo v povratni vezavi plinskega laserja. Vzbujeni atomi plina neona sevajo v vseh smereh na številnih spektralnih črtah vključno z močno rdečo črto pri valovni dolžini $\lambda_0 \approx 633 \text{ nm}$, kar ustreza osrednji frekvenci $f_0 \approx 474 \text{ THz}$. Spektralno širino črte okoli $\Delta f_{Ne} \approx 1.5 \text{ GHz}$ določa Dopplerjev pomik zaradi toplotnega gibanja atomov žlahtnega plina neona.

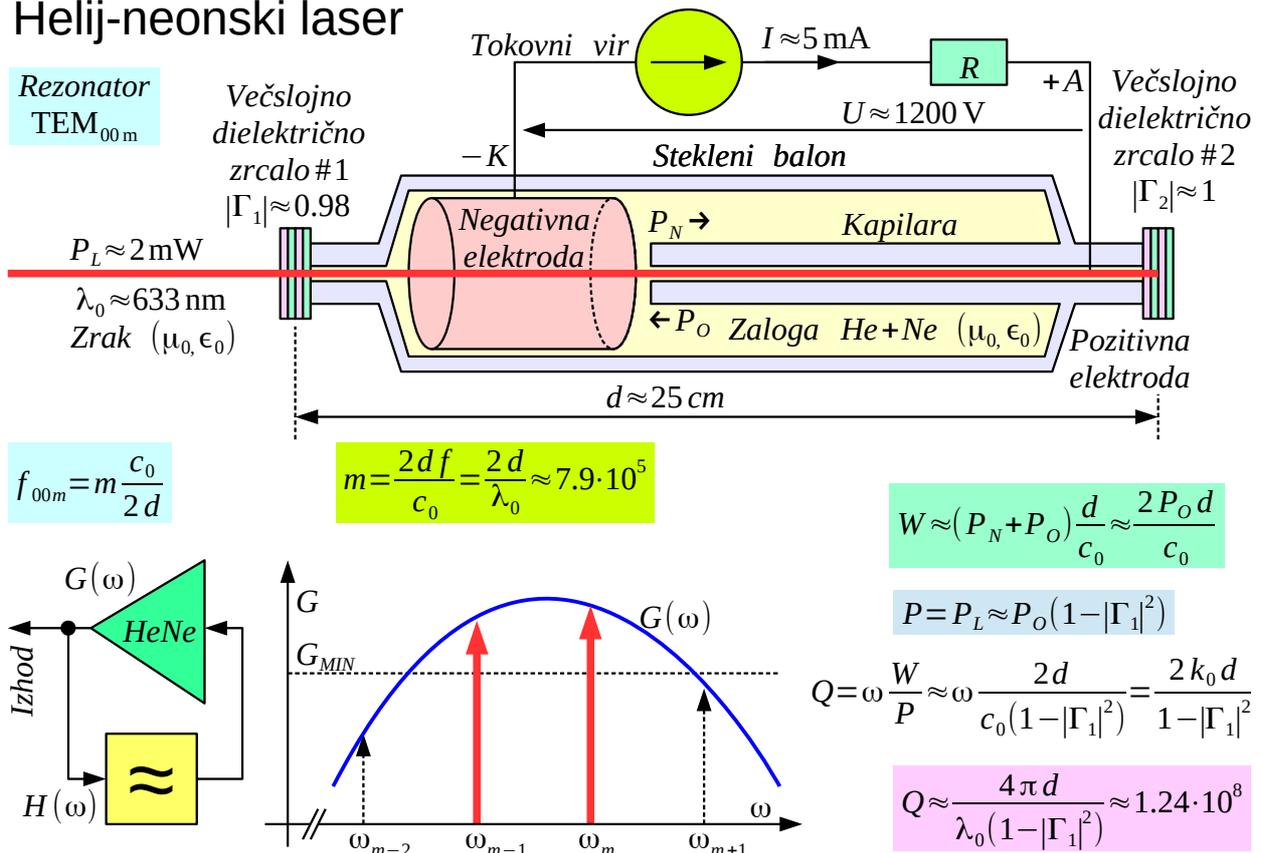
Laserska cev je napolnjena z zmesjo 80% helija in 20% neona pod razmeroma nizkim tlakom, ki se obnaša skoraj kot prazen prostor (μ_0, ϵ_0) za elektromagnetno valovanje. Dodatek helija omogoča učinkovitejše črpanje atomov neona na željeno energijsko raven preko električnega preboja. Cev vžge pri $U_v \approx 7 \text{ kV}$ in gori pri $U \approx 1200 \text{ V}$, zato jo napajamo s tokovnim virom $I \approx 5 \text{ mA}$. Dodatni zaporedni upor R preprečuje nestabilnost preboja v cevi zaradi notranje kapacitivnosti tokovnega vira oziroma visokonapetostnih priključnih vodov.

Katodni padec v plinski cevi močno segreva negativno elektrodo. Zato je slednja velika, da se ne pregreje in ne pokvari plinske zmesi v cevi. Ker se spodnja energijska raven atomov neona prazni preko trkov ob steno posode, dobimo večino laserskega ojačanja v notranjosti ozke steklene kapilare. Kljub

kapilari je ojačanje razredčenega vzbujenega neona majhno, v velikostnem razredu komaj $G/l \approx 1 \text{ dB/m}$ pri osrednji frekvenci $f_0 \approx 474 \text{ THz}$.

Povratna vezava s Fabry-Perotovim rezonatorjem določa tako prostorske kot spektralne lastnosti helij-neonskega laserja. Izbrana povratna vezava določa nihanje samo v smeri osi laserja in to samo na frekvencah rodov rezonatorja $H(\omega)$:

Helij-neonski laser



Razdalja med zrcali na koncih laserske cevi mora biti zadosti velika $d \approx 25 \text{ cm}$, da je frekvenčna razdalja med rodovi $\Delta f_{FP} \approx 600 \text{ MHz}$ manjša od pasovne širine $\Delta f_{Ne} \approx 1.5 \text{ GHz}$ ojačanja neona $G(\omega)$. Tedaj laserska cev niha vsaj na enem rodu, običajno na dveh ali več rodovih. Slika prikazuje močno nihanje cevi na rodu m in nekoliko šibkejše nihanje na rodu $m-1$. Ojačanje neona $G(\omega)$ je premajhno, da bi cev nihala na rodovih $m-2$ oziroma $m+1$.

Razdalja med zrcali laserske cevi $d \gg \lambda_0$ je zelo velika v primerjavi z valovno dolžino svetlobe. Rodovno število rezonatorja $m \approx 7.9 \cdot 10^5$ je zelo veliko. Kvaliteto rezonatorja $Q = \omega W/P$ določimo iz razmerja med vskladiščeno energijo in močjo izgub. Energijo dobimo iz vsote napredujočega

in odbitega vala, moč izgub pa iz odbojnosti Γ_1 polprepustnega zrcala na izhodu laserja. Izredno visoka kvaliteta rezonatorja $Q \approx 1.24 \cdot 10^8$ omogoča izredno ozke spektralne črte nihanja laserja, več kot tisočkrat ožje od širine črte plina neona.

Odbojnost kovinskih zrcal običajno ne preseže vrednosti $|\Gamma| < 0.9$ za svetlobo, kar je za delovanje plinskega laserja z majhnim ojačanjem daleč premalo! V helij-neonskem laserju zato uporabimo večslojni dielektrični zrcali. Tanke plasti dielektrikov zrcal tvorijo številne manjše Fabry-Perotove rezonatorje, ki učinkovito odbijajo svetlobo izbrane valovne dolžine. Večslojna dielektrična zrcala lahko dosežejo odbojnost tudi več kot $|\Gamma| > 0.999$ na izbrani valovni dolžini in hkrati preprečujejo nihanje laserja na drugih barvah oziroma infrardečih črtah neona.

Pomanjkljivost Fabry-Perotovega rezonatorja je, da valovanje v prečnih smereh (x, y) ni omejeno. Na valovnih dolžinah svetlobe si lahko privoščimo zelo širok rezonator oziroma obe zrcali nekoliko vbočimo, da prečno omejimo njegovo elektromagnetno polje. Na radijskih frekvencah oziroma v področju mikrovalov uporabimo dvo-dimenzijski oziroma tri-dimenzijski stojni val:

2D stojni val

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_z C \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{1}_z \frac{C}{4} (e^{jk_x x} - e^{-jk_x x})(e^{jk_y y} - e^{-jk_y y})$$

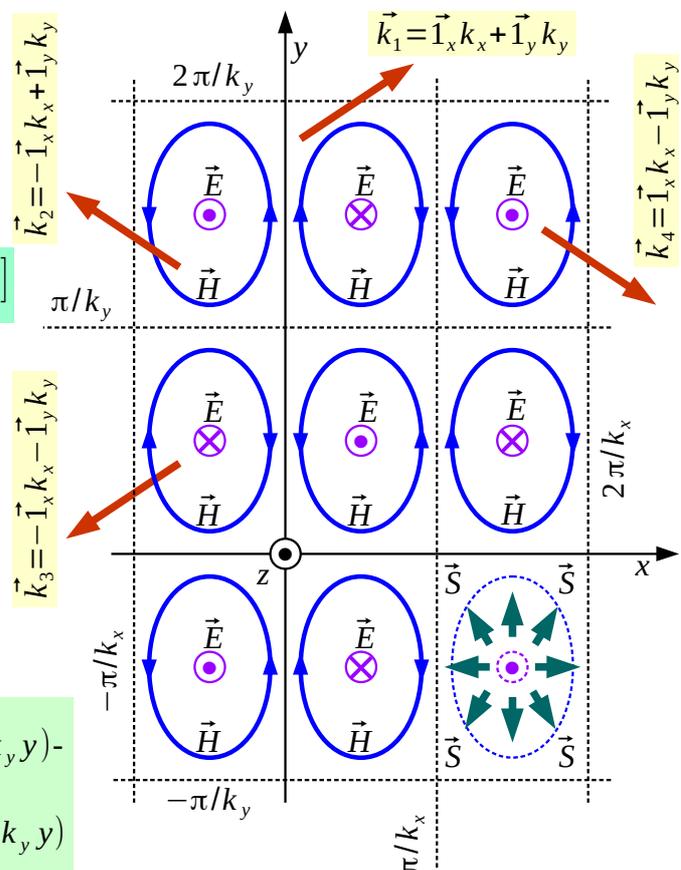
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_z \frac{C}{4} [-e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} - e^{-j\vec{k}_3 \cdot \vec{r}} + e^{-j\vec{k}_4 \cdot \vec{r}}]$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega \mu} \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{j}{kZ} \text{rot } \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{1}_x \frac{jCk_y}{kZ} \sin(k_x x) \cos(k_y y) - \vec{1}_y \frac{jCk_x}{kZ} \cos(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^*$$

$$\vec{S}(\vec{r}) = -\vec{1}_x \frac{j|C|^2 k_x}{2kZ} \sin(k_x x) \cos(k_x x) \sin^2(k_y y) - \vec{1}_y \frac{j|C|^2 k_y}{2kZ} \sin^2(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_y y)$$



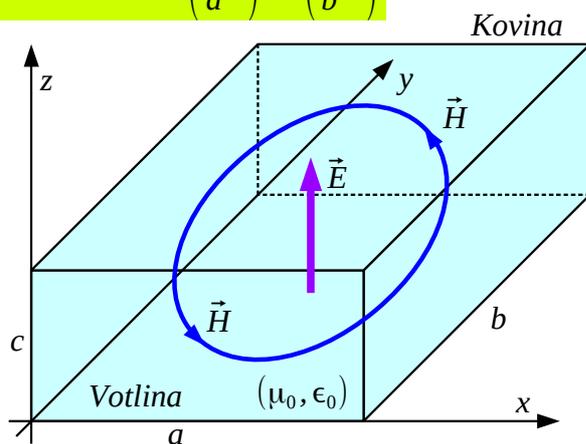
Dvo-dimenzijski stojni val sestavimo iz štirih enako močnih potujočih ravninskih valov $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ in \vec{k}_4 v ravnini xy . Tudi dvo-dimenzijski stojni val ima magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$ v kvadraturi z električnim poljem $\vec{E}(\vec{r})$. Pripadajoči Poyntingov vektor $\vec{S}(\vec{r})$ sestavljata dve povsem jalovi komponenti v ravnini xy . Energija niha med hrbti električnega polja in hrbti magnetnega polja v dveh dimenzijah.

Električna poljska jakost prikazanega dvo-dimenzijskega stojnega vala $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_z C \sin(k_x x) \sin(k_y y)$ ima vozle v ravninah xz in yz ter pripadajočih vzporednih ravninah na medsebojnih razdaljah $\Delta x = \pi/k_x$ oziroma $\Delta y = \pi/k_y$. Vse ravnine, kjer je tangencialno električno polje $\vec{E}_t = 0$, smemo okoviniti: omenjene ravnine vozlov $\vec{E}(\vec{r})$, vzporedne ravninam xz in yz ter poljubno ravnino, vzporedno ravnini xy , saj je električno polje nanje pravokotno.

Najpreprostejši zgled pravokotne votline (μ_0, ϵ_0) ima okovinjene kar sosednje ravnine vozlov, vzporedne xz in yz , to je štiri bočne stranice kvadra ter poljubni dve ravnini, vzporedni xy , to je dno in pokrov kvadra:

Pravokotna votlina

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_z C \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right)$$

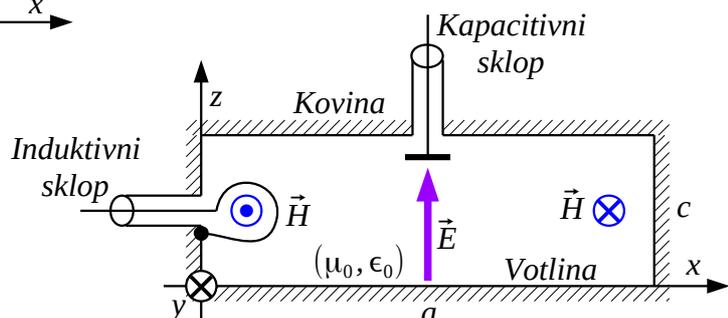
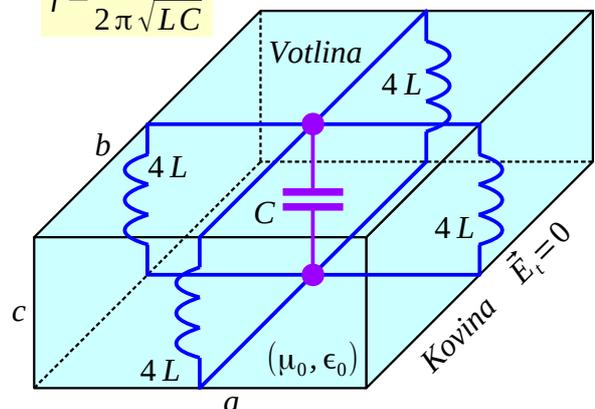


$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$$

$$f_{110} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k_0 c_0}{2\pi} = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

$$f_{110} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}$$

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



Pravokotna votlina je na osnovnem rodu TM_{110} povsem enakovredna električnemu LC nihajnemu krogu. Kondenzator C predstavlja kapacitivnost med dnom in pokrovom votline. Induktivnost L tvorijo vodniki vseh štirih bočnih stranic, torej vzporedna vezava štirih tuljav $4L$.

Kvaliteta LC nihajnega kroga s koncentriranimi gradniki je omejena na $Q \approx 100$ predvsem z izgubami, ohmsko upornostjo R_{Cu} kovinskega vodnika vodnika tuljave L . Kvaliteta pravokotnega votlinskega rezonatorja TM_{110} je omejena s končno prevodnostjo γ_{Cu} kovinskih stranic rezonatorja. Pri frekvenci $f \approx 1\text{GHz}$ votlina na osnovnem rodu TM_{110} dosega kvaliteto $Q \approx 10000$ oziroma sto-krat več od nihajnega kroga s koncentriranimi gradniki!

Višje kvalitete ne dobimo zastonj, votlina (μ_0, ϵ_0) ima precej večje izmere od koncentriranih gradnikov! Izmere rezonatorja lahko zmanjšamo tako, da namesto votline okovinimo kvader iz dobrega dielektrika, na primer metaliziramo površino kvadra iz keramike TiO_2 (titanov dioksid). Čisti TiO_2 ima na radijskih frekvencah zelo majhne izgube in dielektričnost okoli $\epsilon_r \approx 100$. Dielektrični rezonator iz posrebrene keramike ima torej $\sqrt{\epsilon_r} \approx 10$ deset-krat manjše izmere od prave votline.

Podobno kot LC nihajni krog tudi votlino vključimo v električno vezje preko induktivnega oziroma kapacitivnega sklopa. Induktivni sklop dobimo z žično zankico, ki jo vstavimo v votlino tako, da zajame čim močnejše magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$. Kapacitivni sklop dobimo z izolirano elektrodo, ki jo vstavimo v votlino tam, kjer je električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ najmočnejše.

Vsaka votlina lahko poleg osnovnega rodu niha na številnih višjih rodovih. Višje rodove lahko predstavlja dvo-dimenzijski stojni val, to se pravi štirje potujoči ravninski valovi v poljubnih dveh koordinatah (ravnini) oziroma tri-dimenzijski stojni val, to se pravi osem potujočih ravninskih valov v prostoru. Rezonančne frekvence posameznih rodov okovinjene pravokotne votline (μ_0, ϵ_0) oziroma kvadra snovi (μ_r, ϵ_r) dobimo z izrazom:

$$f_{lmn} = \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2}$$

V gornjem izrazu so indeksi $l, m, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ pozitivna cela števila in vsaj dva morata biti od nič različna! Izmere pravokotne votline

običajno izberemo v razmerju $a=b=2c$. Večanje c zvišuje prostornino rezonatorja in kvaliteto Q ter pri tem ne vpliva na osnovno rezonančno frekvenco f_{110} . Razmerje izmer izbiramo tako, da so rezonančne frekvence višjih rodov čim bolj oddaljene od frekvence osnovnega rodu:

$$f_{120}=f_{210}=f_{101}=f_{011}=f_{110}\sqrt{5/2}\approx 1.581f_{110}$$

Pri tem ne smemo pozabiti, da niti LC nihajni krog ni brezhiben. Vsaka tuljava ima porazdeljeno kapacitivnost med ovoji, vsak kondenzator pa porazdeljeno induktivnost elektrod. Vsak nihajni krog z resničnimi koncentriranimi gradniki ima torej tudi višje rezonančne frekvence, ki jih pa zaradi nenatančnega elektromagnetnega opisa ne moremo tako preprosto določiti kot pri pravokotni votlini.

Zaporedje indeksov l, m, n oziroma zaporedje izmer a, b, c se običajno nanaša na zaporedje koordinat (x, y, z) . Nekateri uporabljajo tudi obratno zaporedje koordinat, na primer (z, y, x) pri zapisu indeksov oziroma izmer. Kartezične koordinate so med sabo enakovredne, kar pa za valjne (ρ, φ, z) oziroma drugačne krivočrtne koordinate ne drži!

Povsem jasno tudi okovinjen votel valj deluje kot rezonančna votlina, saj narava nič ne ve, kateri koordinatni sistem je nam ljubši. Rezonančne frekvence okovinjenega votlega valja poiščemo preko rešitve valovne enačbe v valjnih koordinatah (ρ, φ, z) :

Valjne koordinate $\vec{E}(\rho, \varphi, z)$

$$\vec{1}_\rho \neq \text{konst.} \quad \vec{1}_\varphi \neq \text{konst.} \quad \vec{1}_z = \text{konst.}$$

$$0 = \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = \Delta_t \vec{E}_t + \vec{1}_z \Delta E_z + k^2 \vec{E}$$

$$\Delta E_z(\rho, \varphi, z) + k^2 E_z(\rho, \varphi, z) = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0$$

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} + k^2 - \beta^2 = 0 \quad k_\rho^2 = k^2 - \beta^2$$

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} + k_\rho^2 = 0$$

$$R(\rho) = J_m(k_\rho \rho) \quad \text{brez singularnosti} (\rho=0)$$

$$J_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/2)^{2n+m}}{n!(n+m)!}$$

$$E_z(\rho, \varphi, z) = J_m(k_\rho \rho) [C_1 \cos(m\varphi) + C_2 \sin(m\varphi)] [C_3 \cos(\beta z) + C_4 \sin(\beta z)]$$

Valjni Laplace

$$\text{grad } E_z = \vec{1}_\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \vec{1}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \vec{1}_z \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\Delta E_z = \text{div}(\text{grad } E_z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

$$E_z(\rho, \varphi, z) = R(\rho) F(\varphi) Z(z)$$

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0$$

$-m^2 \quad -\beta^2$

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -m^2 \rightarrow F(\varphi) = C_1 \cos(m\varphi) + C_2 \sin(m\varphi)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\beta^2 \rightarrow Z(z) = C_3 \cos(\beta z) + C_4 \sin(\beta z)$$

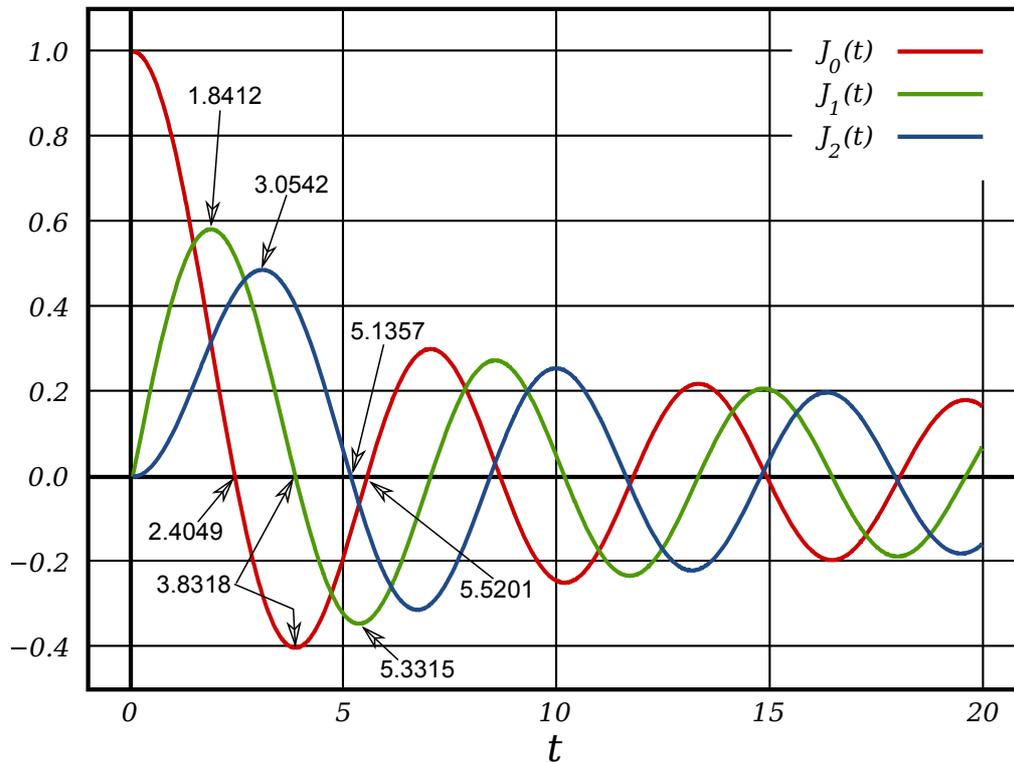
V valjnih koordinatah (ρ, φ, z) ima vektorski Laplace preprosto komponento v smeri osi z . Naloge elektrodinamike v valjnih koordinatah običajno rešujemo tako, da najprej poiščemo komponenti polja E_z oziroma H_z ter nato iz njih izračunamo preostale prečne komponente polja.

Rešitev skalarne valovne enačbe iščemo v obliki produkta funkcij ene spremenljivke $E_z(\rho, \varphi, z) = R(\rho) F(\varphi) Z(z)$. Rešitvi za $F(\varphi)$ in $Z(z)$ zapišemo s trigonometrijskimi funkcijami, saj iščemo stojni val. Ker sredi votline ni singularnosti, kot rešitev za $R(\rho) = J_m(k_\rho \rho)$ zadošča že Besselova funkcija reda m :

$$J_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/2)^{2n+m}}{n!(n+m)!}$$

Besselove funkcije

$$J_m(t \gg 1) \approx \sqrt{2/(\pi t)} \cos(t - \pi/4 - m\pi/2)$$



Izračun valjnega rezonatorja zakomplicirajo ničle Besselovih funkcij $J_m(t)$ ter njihovih odvodov $J_m'(t)$, ki jih ne moremo določiti tako preprosto kot pripadajočih lastnosti trigonometrijskih funkcij. Šele pri velikih argumentih $t \gg 1$ Besselove funkcije postanejo podobne trigonometrijskim funkcijam.

Rodu TM_{110} v pravokotni votlini je enakovreden rod TM_{100} v votlem valjnem rezonatorju. Polje osnovnega rodu $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_z C J_0(k_0 \rho)$ ni odvisno od azimuta $\partial/\partial \varphi = 0$, torej je $m=0$, niti od višine $\partial/\partial z = 0$, torej je $\beta=0$. Konstanta $k_\rho = k_0$ je tedaj kar enaka valovnemu številu v praznem prostoru znotraj votline.

Pripadajoče magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$ osnovnega rodu TM_{100} ima samo komponento v smeri $\vec{1}_\varphi$, ki jo izračunamo preko Faradayevega zakona. Z Gaussovimi in Ampèrejevimi zakoni preverimo, da opisano elektromagnetno polje zadošča vsem Maxwellovim enačbam in nima drugih komponent. Osnovni rod TM_{100} ima prvo ničlo električnega polja na plašču valja $\vec{E}(\rho=a)$, ko velja $k_0 = 2.4049/a$:

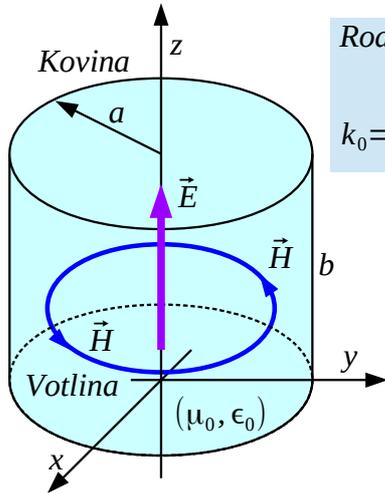
Valjni rezonator

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow m=0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \rightarrow \beta=0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_z C J_0(k_0 \rho)$$

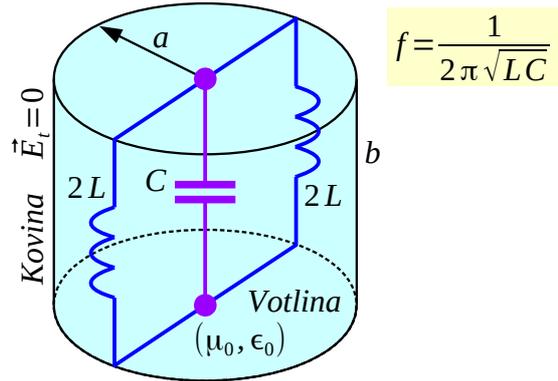
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{k_0 Z_0} \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_\varphi \frac{-jC}{Z_0} J_0'(k_0 \rho)$$



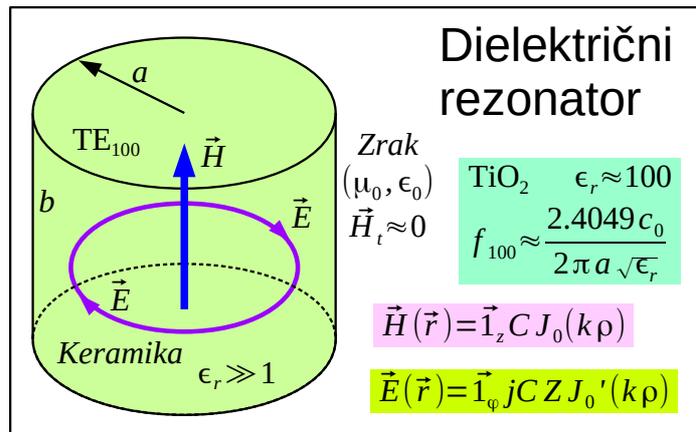
Rod TM_{100}

$$k_0 = \frac{2.4049}{a}$$

$$f_{100} = \frac{k_0 c_0}{2\pi} = \frac{2.4049 c_0}{2\pi a} \approx \frac{114.75 \text{ MHz} \cdot \text{m}}{a}$$



$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



Dielektrični rezonator

Zrak

(μ_0, ϵ_0)

$\vec{H}_t \approx 0$

TiO₂ $\epsilon_r \approx 100$

$$f_{100} \approx \frac{2.4049 c_0}{2\pi a \sqrt{\epsilon_r}}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{1}_z C J_0(k\rho)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_\varphi jC Z J_0'(k\rho)$$

Iz valovnega števila dobimo rezonančno frekvenco $f = k_0 c_0 / 2\pi$ osnovnega rodu. Frekvence nekaterih višjih rodov lahko odmaknemo višje tako, da izbiramo manjšo višino valja $b < a$ v primerjavi s polmerom valja. Povsem enako kot pravokotna votlina je tudi valjni rezonator nadomestek LC nihajnega kroga. Pri enaki prostornini dosega valjni rezonator celo malenkost višjo kvaliteto Q od pravokotne votline.

Valjna votlina ima svoj dualni zgleđ, dielektrični rezonator v obliki keramičnega valja, ki niha na osnovnem rodu TE_{100} . Če je dielektričnost valja iz keramike zelo visoka $\epsilon_r \gg 1$, se okoliški zrak oziroma prazen prostor (μ_0, ϵ_0) obnaša skoraj kot odprte sponke, kar zahteva $\vec{H}_t \approx 0$ na plašču valja. Dielektrični rezonator ne vsebuje kovine, torej ni ohmskih izgub! Dielektrični rezonator ima kvečjemu izgube zaradi nečistoč v keramiki.

Žal elektromagnetno polje dielektričnega rezonatorja ni povsem zaključeno v keramiki $\epsilon_r \gg 1$. Brez dodatnega kovinskega oklopa dielektrični rezonator seva kot antena. Tokovi v kovinskem oklopu dodajajo izgube, kar znižuje kvaliteto Q dielektričnega rezonatorja.

Navedeni izrazi za elektromagnetno polje in rezonančno frekvenco so samo grobi približki. Točno frekvenco določa kovinski oklop na določeni razdalji od keramike. Če ravno kovinsko ploščo približujemo osnovnici oziroma pokrovu valja, se rezonančna frekvenca viša. Z spreminjanjem razdalje med dielektričnim valjem in kovinskima ploščama pod in nad njim lahko natančno nastavimo rezonančno frekvenco.

Ker v osi valja ni električnega polja rodu TE_{100} , dielektrični rezonator pogosto izdelamo kot obroček iz keramike. Luknjo v sredini uporabimo za pritrditev oziroma z njo odmaknemo rezonančne frekvence nekaterih višjih rodov. Dielektrični rezonator običajno sklopimo v električno vezje z malimi antenami, ki so postavljene v smeri električnega polja $\vec{1}_\varphi$ ob plašču valja.

* * * * *