

## 9. Vektorski potencial

Reševanje preproste elektrotehnične naloge: kakšni sta polji  $\vec{E}(\vec{r})$  oziroma  $\vec{H}(\vec{r})$ , če poznamo izvore, torej vse tokove  $\vec{J}(\vec{r})$  in vse elektrine  $\rho(\vec{r})$ , vodi v dve komplicirani, vektorski diferencialni valovni enačbi drugega reda. Kompliciran račun skušamo poenostaviti z uvedbo novih vmesnih spremenljivk, ki jih imenujemo potenciali.

Račun je najpreprostejši v elektrostatiki  $\partial/\partial t=0$  oziroma  $\omega=0$ . Takrat je vrtnčenje električnega polja zagotovo enako nič  $\text{rot } \vec{E}(\vec{r})=0$ . Če je vrtnčenje vektorskega polja enako nič, lahko takšno polje zapišemo kot smerni odvod neke skalarne veličine. Izbrano skalarno funkcijo  $V(\vec{r})$  imenujemo kar potencial v elektrostatiki:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r})$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow \text{div}(\text{grad } V) = \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Žal sta takšen potencial  $V(\vec{r})$  in pripadajoča diferencialna enačba skoraj neuporabna v elektrodinamiki, kjer velja  $\omega \neq 0$  oziroma  $\text{rot } \vec{E} \neq 0$ .

Podoben skalarni potencial  $V_m(\vec{r})$  lahko uvedemo v magnetostatiki.  $\text{rot } \vec{H}(\vec{r})=0$  zahteva statiko  $\partial/\partial t=0$  oziroma  $\omega=0$  in hkrati še odsotnost tokov  $\vec{J}(\vec{r})=0$  vsaj v tistem delu prostora, kjer uporabljamo  $V_m(\vec{r})$ . Skalarni magnetni potencial  $V_m(\vec{r})$  tedaj določa enačba:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad } V_m(\vec{r})$$

$$\text{div } \vec{H} = 0 \rightarrow \text{div}(\text{grad } V_m) = \Delta V_m = 0$$

Žal sta takšen potencial  $V_m(\vec{r})$  in pripadajoča diferencialna enačba skoraj neuporabna tam, kjer je  $\vec{J}(\vec{r}) \neq 0$  oziroma v elektrodinamiki, kjer velja  $\omega \neq 0$  oziroma  $j\omega \vec{D} \neq 0$ .

Gostota električnega toka  $\vec{J}(\vec{r})$  je vektorska veličina. Njenega učinka zato ne moremo opisati z neko vmesno skalarno veličino, saj skalarna

funkcija vsebuje trikrat manj podatkov od vektorske funkcije. Smiselna izbira bo v tem primeru neka vmesna vektorska veličina. Vektorski potencial

$\vec{A}(\vec{r})$  je definirali že James Clerk Maxwell kot:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \quad \text{oziroma} \quad \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$$

Nova veličina vektorski potencial  $\vec{A}(\vec{r})$  ima mersko enoto  $[\text{Vs/m}]$ . Pripadajoče električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$  dobimo iz Faradayevega zakona. Električnemu polju smemo dodati poljuben smerni odvod, na primer  $-\text{grad } V(\vec{r})$ , saj je vrtnčenje slednjega vedno enako nič:

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \text{rot } \vec{A} \rightarrow \text{rot}(\vec{E} + j\omega \vec{A}) = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) - \text{grad } V(\vec{r})$$

Polji  $\vec{E}(\vec{r})$  in  $\vec{H}(\vec{r})$  torej računamo preko vmesnih veličin, vektorskega potenciala  $\vec{A}(\vec{r})$  in skalarne potenciala  $V(\vec{r})$  v poljubni nalogi elektrodinamike, kjer velja  $\omega \neq 0$ ,  $\vec{J}(\vec{r}) \neq 0$  oziroma  $\rho(\vec{r}) \neq 0$ . Pri tem smo skalarni potencial  $V(\vec{r})$  izbrali tako, da je čim bolj podoben tistemu iz elektrostatike. Za oba potenciala  $\vec{A}(\vec{r})$  in  $V(\vec{r})$  moramo seveda poiskati točne valovne enačbe v elektrodinamiki.

Valovno enačbo za vektorski potencial  $\vec{A}(\vec{r})$  dobimo iz Ampèrejevega zakona:

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{J} + j\omega \epsilon \vec{E} = \vec{J} + \omega^2 \epsilon \vec{A} - j\omega \epsilon \text{grad } V$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{A} = -\mu \vec{J} + \text{grad}(j\omega \mu \epsilon V + \text{div } \vec{A})$$

V vsem dosedanjem izvajanju je bilo določeno samo vrtnčenje vektorskega potenciala  $\text{rot } \vec{A}$ . Izvornost vektorskega potenciala  $\text{div } \vec{A}$  je zaenkrat poljubna, saj je popolnoma neodvisna od vrtnčenja.

Izvornost vektorskega potenciala  $\text{div } \vec{A}$  lahko izberemo na različne načine. Najbolj preprosta izgleda na prvi pogled Columbova izbira  $\text{div } \vec{A} = 0$  (angleško: Columb gauge). Valovno enačbo za vektorski

potencial najbolj poenostavi Lorentzova izbira  $j\omega\mu\epsilon V + \operatorname{div} \vec{A} = 0$   
(angleško: Lorentz gauge):

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) + \omega^2 \mu\epsilon \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r})$$

Z Lorentzovo izbiro je vektorski potencial  $\vec{A}(\vec{r})$  odvisen samo od gostote električnega toka  $\vec{J}(\vec{r})$  ter ni odvisen od prostorske elektrine  $\rho(\vec{r})$ . Iz Gaussovega zakona dobimo še valovno enačbo za skalarni potencial  $V(\vec{r})$ :

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon} = \operatorname{div}(-j\omega \vec{A} - \operatorname{grad} V) = -\omega^2 \mu\epsilon V - \Delta V$$

$$\Delta V(\vec{r}) + \omega^2 \mu\epsilon V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Skalarni potencial  $V(\vec{r})$  je z Lorentzovo izbiro odvisen samo od prostorske elektrine  $\rho(\vec{r})$  ter ni odvisen od gostote električnega toka  $\vec{J}(\vec{r})$ . Čeprav ima skalarni potencial  $V(\vec{r})$  mersko enoto  $[V]$ , ni neposredno povezan z električno napetostjo  $U$ , saj je slednja lahko definirana na različne načine oziroma v marsikateri nalogi elektrodinamike sploh ne obstaja.

Lorentzova izbira omogoča, da lepo ločimo učinka elektrine  $\rho(\vec{r})$  in toka  $\vec{J}(\vec{r})$ . Elektrina  $\rho(\vec{r})$  je skalarna veličina in poganja skalarni potencial  $V(\vec{r})$ . Tok  $\vec{J}(\vec{r})$  je vektorska veličina in poganja vektorski potencial  $\vec{A}(\vec{r})$ . Pri tem ne smemo pozabiti, da sta tok  $\vec{J}(\vec{r})$  in elektrina  $\rho(\vec{r})$  povezana z zahtevo za zveznost  $j\omega\rho(\vec{r}) + \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}) = 0$  (kontinuitetna enačba).

Konstanta  $\omega^2 \mu\epsilon$  nastopa v vseh valovnih enačbah za  $\vec{E}(\vec{r})$ ,  $\vec{H}(\vec{r})$ ,  $\vec{A}(\vec{r})$  oziroma  $V(\vec{r})$ . Konstanto lahko izrazimo na različne načine vključno s hitrostjo valovanja  $1/\sqrt{\mu\epsilon} = v [m/s]$ :

$$\omega^2 \mu\epsilon = \frac{\omega^2}{v^2} = k^2 \rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \equiv \text{valovno število} \left[ \frac{\text{rd}}{\text{m}} \right]$$

Valovno število  $k$  pove, kako hitro se faza spreminja z razdaljo v prostoru. V praznem prostoru seveda velja  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $k = k_0$  in  $v = c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Z valovnim številom  $k$  obe valovni enačbi za

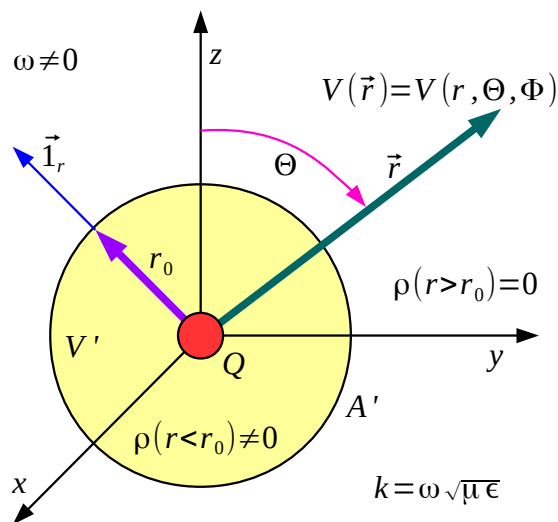
potenciala preprosto zapišemo v frekvenčnem prostoru:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) + k^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r})$$

$$\Delta V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Najprej poskusimo poiskati rešitev za skalarno enačbo za  $V(\vec{r})$ , saj je preprostejša od vektorske enačbe za  $\vec{A}(\vec{r})$ . Najbolj preprost primer je ena sama točkasta elektrina  $Q$  v koordinatnem izhodišču. Takšna elektrina predstavlja singularnost, zato jo omejimo s kroglico s polmerom  $r_0$ :

### Točkasta elektrina



Zunaj kroglice  $\rho(r > r_0) = 0 \rightarrow \Delta V + k^2 V = 0$

Ugibamo rešitev  $V(r, \Theta, \Phi) = \frac{C}{r} e^{-jkr}$

$$\text{grad } V = \vec{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{C}{r} e^{-jkr} \right) = -\vec{i}_r C \left( \frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{-jkr}$$

$$\Delta V = \text{div}(\text{grad } V) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 (-C) \left( \frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{-jkr} \right)$$

$$\Delta V = -\frac{C}{r^2} (jk e^{-jkr} + (1 + jkr)(-jk) e^{-jkr}) = -k^2 V$$

$$\Delta V + k^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \leftarrow \iiint_{V'} dV'$$

$$\iiint_{V'} \Delta V dV' + \iiint_{V'} k^2 V dV' = \iiint_{V'} -\frac{\rho}{\epsilon} dV' = -\frac{Q}{\epsilon}$$

$$\iiint_{V'} \Delta V dV' = \iiint_{V'} \text{div}(\text{grad } V) dV' = \oint_{A'} \text{grad } V \cdot \vec{i}_r dA' = \text{grad } V \cdot \vec{i}_r 4\pi r_0^2 = -4\pi C(1 + jkr_0) e^{-jkr_0}$$

$$r_0 \rightarrow 0 \quad -4\pi C(1 + jkr) e^{-jkr} \rightarrow -4\pi C \quad -4\pi C = -\frac{Q}{\epsilon}$$

$$\iiint_{V'} k^2 V dV' = \int_0^{r_0} k^2 \frac{C}{r} e^{-jkr} 4\pi r^2 dr \rightarrow 0$$

$$C = \frac{Q}{4\pi\epsilon}$$

$$V(r, \Theta, \Phi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr}$$

Zunaj kroglice  $r > r_0$  ni elektrini singularnosti. Zunaj kroglice rešujemo poenostavljeno valovno enačbo brez izvorov. Rešitev za  $V(\vec{r}) = V(r, \Theta, \Phi)$  ugibamo v krogelnih koordinatah. V elektrostatiki je potencial točkaste elektrine točno obratno sorazmeren razdalji  $1/r$ . V elektrodinamiki sklepamo, da bo potencial  $V(\vec{r}, t)$  zakasnen učinek elektrine  $Q(t') = Q(t - r/v)$ . V frekvenčnem prostoru pomeni opisana zakasnitev fazni zasuk  $\varphi = -kr$ , kjer minus pomeni zaostajanje faze.

Diferencialna enačba drugega reda zahteva dve neodvisni rešitvi, v opisanem primeru s členoma  $e^{+jkr}$  in  $e^{-jkr}$ . Člen  $e^{+jkr}$  fizikalno ni smiselno, ker je potencial  $V(\vec{r})$  posledica elektrine  $Q$ , torej sme biti kvečjemu zakasnen. Fizikalno torej zadošča rešitev  $e^{-jkr}$  in ena sama pripadajoča konstanta  $C$ .

V notranjosti kroglice  $r < r_0$  smemo poskusiti z enako rešitvijo za potencial  $V(\vec{r})$ , čeprav elektrina  $\rho(\vec{r})$  tam ne bo prav povsod enaka nič. Česar v notranjosti kroglice ne znamo narediti, v singularnosti v koordinatnem izhodišču ne znamo izračunati diferencialnih operacij  $\text{grad } V$  niti  $\Delta V$ . Valovno enačbo zato integriramo po celotni prostornini  $V'$  kroglice.

Izračun  $\Delta V = \text{div}(\text{grad } V)$  v singularnosti v koordinatnem izhodišču zaobidemo tako, da integral po prostornini  $V'$  kroglice pretvorimo s pomočjo Gaussovega izreka oziroma definicije izvornosti v integral po površini kroglice  $A'$ , kjer ni singularnosti in znamo izračunati  $\text{grad } V$ . Sam potencial  $V$  smemo integrirati po celotni prostornini kroglice singularnosti navkljub, saj je vrednost integrala omejena in gre proti nič, če kroglico manjšamo v nič,  $r_0 \rightarrow 0$ .

V opisani nalogi opazimo, da nam primanjkuje različnih črk! Črko  $V$  uporabljamo tako za potencial kot za prostornino kroglice, zato slednjo označimo z  $V'$ . Črko  $A$  uporabljamo tako za vektorski potencial  $\vec{A}$  kot za površino, zato slednjo označimo z  $A'$ . Končno, črko  $\rho$  uporabljamo tako za gostoto elektrine kot za valjno koordinato, ki v opisani nalogi na srečo ne nastopa.

Integracija desne strani valovne enačbe je preprosta, seštejemo vse elektrine znotraj kroglice. Za eno samo točkasto elektrino  $Q$  v koordinatnem izhodišču dobimo  $-Q/\epsilon$ . Z manjšanjem kroglice v nič  $r_0 \rightarrow 0$  dobimo iskano konstanto  $C = Q/(4\pi\epsilon)$ . Rešitev valovne enačbe za skalarni potencial ene same točkaste elektrine  $Q$  v koordinatnem izhodišču se torej glasi:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr}$$

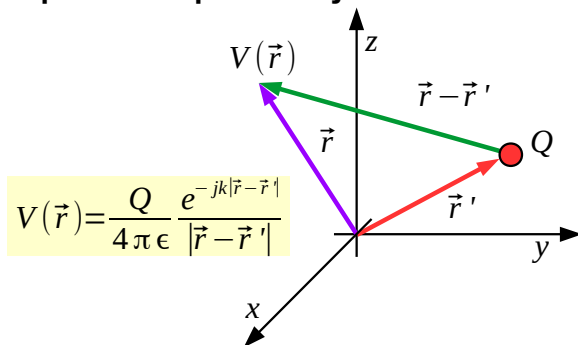
Opisano rešitev valovne enačbe lahko takoj posplošimo za elektrino  $Q$  na poljubnih koordinatah  $\vec{r}'$  tako, da prestavimo izhodišče

koordinatnega sistema. Razdaljo  $r$  tedaj nadomesti izraz  $|\vec{r} - \vec{r}'|$ .

Ker je valovna enačba linearna, je vsota veljavnih rešitev prav tako rešitev iste enačbe. Izraz za potencial ene točkaste elektrine smemo torej razširiti na vsoto potencialov več točkastih elektrin  $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$  na pripadajočih koordinatah  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \dots$

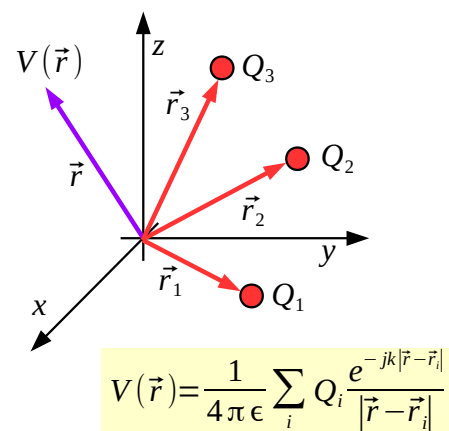
Končno lahko vsoto točkastih elektrin  $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$  prevedemo na integral prostorske elektrine  $\rho(\vec{r}')$ :

### Splošen položaj elektrine



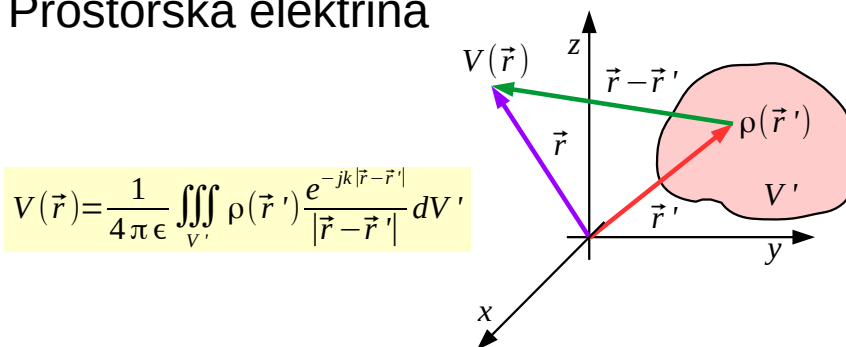
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

### Več elektrin



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i Q_i \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}_i|}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

### Prostorska elektrina



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Valovno enačbo za vektorski potencial  $\vec{A}(\vec{r})$  razstavimo na komponente v kartezičnem koordinatnem sistemu  $(x, y, z)$ . Konstantni smerni vektorji slednjega omogočajo preprosto razstavljanje Laplaceja vektorske funkcije  $\Delta \vec{A}(\vec{r})$ . Dobimo tri skalarne valovne enačbe:

$$\Delta A_x(\vec{r}) + k^2 A_x(\vec{r}) = -\mu J_x(\vec{r})$$

$$\Delta A_y(\vec{r}) + k^2 A_y(\vec{r}) = -\mu J_y(\vec{r})$$

$$\Delta A_z(\vec{r}) + k^2 A_z(\vec{r}) = -\mu J_z(\vec{r})$$

Matematično povsem enakovredno skalarno valovno enačbo za  $V(\vec{r})$  smo že rešili. Torej uporabimo isti postopek reševanja tudi za tri skalarne enačbe za komponente vektorskega potenciala  $A_x(\vec{r})$ ,  $A_y(\vec{r})$  in  $A_z(\vec{r})$ . Dobimo tri obrazce za izračun komponent:

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} J_x(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} J_y(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} J_z(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

Vse tri rešitve lahko preprosto združimo v vektorski zapis, ki velja v poljubnem (tudi krivočrtnem) koordinatnem sistemu:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

Iz obrazca za izračun vektorskega potenciala  $\vec{A}(\vec{r})$  je razvidno, da ima slednji isto smer kot tok  $\vec{J}(\vec{r})$ , ki ga poganja. Informacija o smeri gibanja elektronov se torej neposredno prenaša v vektorski potencial. Končni obrazec za izračun vektorskega potenciala  $\vec{A}(\vec{r})$  je silno podoben obrazcu za izračun skalarnega potenciala  $V(\vec{r})$ :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

Oba gornja obrazca imata skupno ime: obrazca za zakasnjena potenciala (angleško: retarded potentials). Ime zakasnjena potenciala izvira iz strogega upoštevanja zakasnitve učinka izvora v točki opazovanja potenciala, kar zahteva relativistika.

Med valovnima enačbama za vektorski in skalarni potencial ter obrazcema za izračun vektorskega in skalarnega potenciala je nekaj pomembnih razlik. Valovni enačbi veljata v poljubni točki prostora s

koordinatami  $\vec{r}$ . Izvora  $\vec{J}(\vec{r})$  in  $\rho(\vec{r})$  imata iste koordinate kot potenciala  $\vec{A}(\vec{r})$  in  $V(\vec{r})$  v valovnih enačbah. Rešitev diferencialne valovne enačbe ni samoumevna. Diferencialna enačba naleti na težave ob singularnostih.

Obrazca za izračun vektorskega in skalarne potenciala uporabljata dvoje različnih koordinat. Koordinate izvorov  $\vec{r}'$  so označene s črtico kot tudi pripadajoča prostornina  $V'$  in podobno. Koordinate izračunanih potencialov so označene brez črtic  $\vec{r}$ . Koordinate izvorov  $\vec{r}'$  so pri tem popolnoma neodvisne od koordinat potencialov  $\vec{r}$ . Pri odvajanju ali integriranju moramo zato paziti, s katerimi koordinatami računamo: s položajem virov  $\vec{r}'$  ali s položajem učinkov (potentialov)  $\vec{r}$ ?

Integriranje je samoumevno seštevanje učinkov več izvorov. Integriranje je zelo odporno na singularnosti. Integracijo gostote elektrine  $\rho(\vec{r})$  zlahka prevedemo na vsoto točkastih elektrin  $Q_i$ . Prostorsko integracijo gostote električnega toka  $\vec{J}(\vec{r})$  zlahka prevedemo na enodimenzijsko integracijo vzdolž žice, ki vodi tok  $I$ .

Obrazca za zakasnjena potenciala  $\vec{A}(\vec{r})$  in  $V(\vec{r})$  ne vsebujeta vrtinčenja. Do točnega električnega polja  $\vec{E}(\vec{r})$  torej lahko pridemo v elektrodinamiki brez magnetnih veličin in brez pravila desnega vijaka! V obrazcu za izračun električnega polja  $\vec{E}(\vec{r})$  iz potencialov  $\vec{A}(\vec{r})$  in  $V(\vec{r})$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) - \text{grad } V(\vec{r})$$

nastopajo samo še koordinate točke  $\vec{r}$ , kjer v isti točki prostora hkrati opazujemo oba potenciala in polje. Smerni odvod v gornjem obrazcu za  $\vec{E}(\vec{r})$  torej računamo po koordinatah  $\vec{r}$ !

\* \* \* \* \*